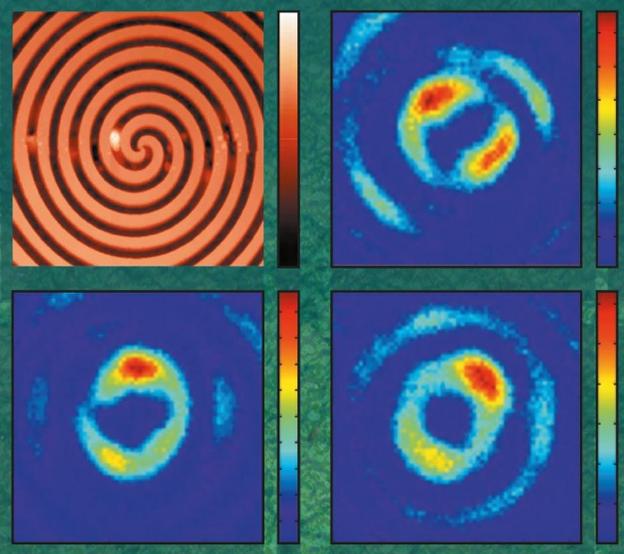


ВРАЩАЮЩИЕСЯ ВИХРЕВЫЕ ЛАЗЕРНЫЕ ПУЧКИ

В. В. КОТЛЯР
А. А. КОВАЛЕВ
С. Н. ХОНИНА



ВРАЩАЮЩИЕСЯ ВИХРЕВЫЕ ЛАЗЕРНЫЕ ПУЧКИ



ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	6
Глава 1. Инвариантные пучки и пучки с продольной периодичностью	9
1.1. Инвариантные лазерные пучки (эксперимент)	9
1.1.1. Самовоспроизведение как инвариантность к действию различных операторов	10
1.1.2. Бездифракционные пучки Бесселя	11
1.1.3. Гауссовы пучки	16
1.1.4. Формирование самовоспроизводящихся лазерных пучков в дифракционных порядках	19
1.1.5. Обнаружение угловых гармоник	22
1.2. Чистые оптические вихри	26
1.2.1. Чистые вихри — инвариантные пучки с минимальной расходимостью	27
1.2.2. Гипергеометрические моды	31
1.2.3. Свойства чистых вихрей	33
1.2.4. Результаты численного моделирования	34
1.3. Гипергеометрические моды (эксперимент)	37
1.3.1. Теоретические основы	38
1.3.2. Численное моделирование	40
1.3.3. Эксперимент	43
Глава 2. Многомодовые вращающиеся пучки	48
2.1. Пучки с продольной периодичностью	48
2.1.1. Теоретические основания	49
2.1.2. Алгоритмы расчета ДОЭ	51
2.1.3. Результаты моделирования	53
2.2. Вращение многомодовых пучков Бесселя	57
2.2.1. Расчет фазового ДОЭ для формирования вращающегося пучка	58
2.2.2. Градиентный алгоритм расчета фазового ДОЭ	60
2.2.3. Вращение многомодового пучка в волокне	61
2.2.4. Численный расчет	62
2.3. Вращающиеся пучки без орбитального углового момента	67
2.4. Эллиптический пучок Лагерра–Гаусса	73
2.4.1. Преобразование Френеля от моды Лагерра–Гаусса	75

2.4.2. Наклонный парааксиальный световой пучок Лагерра–Гаусса	77
2.4.3. Эллиптический парааксиальный пучок Лагерра–Гаусса	80
2.4.4. Результаты численного моделирования	88
2.4.5. Эксперимент	91
Глава 3. Вращение вихревых пучков в ближней зоне	96
3.1. Вращение пучка при дифракции на спиральной фазовой пластинке	96
3.1.1. Ход лучей после спиральной фазовой пластинки	97
3.1.2. Скалярная теория дифракции на рельефе СФП	100
3.1.3. Строгое моделирование с помощью уравнений Максвелла	103
3.1.4. Эксперимент	104
3.2. Вращение двухлепесткового оптического вихря в ближнем поле вихревого микроаксикона	106
3.2.1. Теоретические основания	108
3.2.2. Моделирование	109
3.2.3. Изготовление вихревого аксикона	112
Глава 4. Вращающиеся асимметричные лазерные пучки	115
4.1. Вращающийся асимметричный пучок Бесселя–Гаусса	115
4.1.1. Линейная комбинация БГ-пучков	116
4.1.2. Фурье-спектр аБГ-пучка	124
4.1.3. Орбитальный угловой момент аБГ-пучка	125
4.1.4. Взаимная неортогональность функций, описывающих семейство аБГ-пучков	126
4.1.5. Эксперимент	127
4.2. Асимметричные вращающиеся пучки Лагерра–Гаусса	129
4.2.1. Пучки Лагерра–Гаусса с комплексным смещением	131
4.2.2. Мощность смещенного пучка Лагерра–Гаусса	133
4.2.3. Орбитальный угловой момент смещенного пучка Лагерра–Гаусса	136
4.2.4. Парааксиальные пучки Лагерра–Гаусса в форме вращающегося полумесяца	140
4.2.5. Экспериментальное формирование асимметричного пучка Лагерра–Гаусса	144
4.2.6. Вращающиеся суперпозиции асимметричных пучков Лагерра–Гаусса	147
4.3. Асимметричные вращающиеся пучки Куммера	150
4.3.1. Смещенные пучки Куммера	150
4.3.2. Орбитальный угловой момент асимметричного пучка Куммера	153
4.3.3. Численное моделирование	155
Глава 5. Эллиптические вращающиеся пучки	157
5.1. Гауссов пучок с внедренным эллиптическим вихрем	157
5.1.1. Вычисление орбитального углового момента	158
5.1.2. Вычисление комплексной амплитуды поля	160
5.1.3. Эксперимент по формированию эллиптического гауссова вихря	163

5.2. Дифракция эллиптического гауссова пучка на эллиптической спиральной фазовой пластинке	171
5.2.1. Орбитальный угловой момент эллиптического пучка после прохождения через эллиптическую спиральную фазовую пластинку	173
5.2.2. Численное моделирование	177
5.2.3. Вывод формулы для нормированного ОУМ	181
Глава 6. Вращающиеся астигматические лазерные пучки	184
6.1. Безвихревой астигматический пучок	184
6.1.1. Безвихревой пучок с орбитальный угловым моментом	185
6.1.2. Орбитальный угловой момент астигматического пучка	187
6.1.3. Моделирование	191
6.1.4. Астигматический пучок после скрещенных цилиндрических линз и в ABCD-системе	192
6.2. Вращающийся астигматический пучок Эрмита–Гаусса	195
6.2.1. Безвихревой пучок с ОУМ	197
6.2.2. Формирование эллиптического гауссова пучка	200
6.2.3. Эллиптический пучок Эрмита–Гаусса после цилиндрической линзы	202
6.2.4. Эксперимент	204
6.3. Вращающийся эллиптический астигматический вихревой гауссов пучок	209
6.3.1. Амплитуда пучка на двойном фокусном расстоянии от цилиндрической линзы	210
6.3.2. Семейство астигматических эллиптических гауссовых вихрей	213
6.3.3. Результаты моделирования	215
6.3.4. Эксперимент	217
Заключение	221
Список литературы	222

Введение

Вращающиеся световые поля, у которых при распространении в свободном пространстве вращается вокруг оптической оси распределение интенсивности в поперечном сечении, нашли применение в микроскопии при измерении локализации и ориентации отдельных молекул [1], при зондировании атмосферы и в беспроводных системах связи [2], для передачи информации под водой [3], а также в датчиках магнитного поля [4].

Впервые вращающиеся оптические вихри — когерентные световые поля с сингулярной фазой, которые вращаются при распространении в свободном пространстве, рассмотрены в [5]. В [5] было получено условие для номеров линейной комбинации мод Лагерра–Гаусса (ЛГ), интенсивность которой как целое вращается при распространении. В [6] с помощью цифровой голограммы был сформирован вращающийся вихревой пучок, состоящий из суммы двух мод ЛГ с номерами (0,0) и (4,2), и имеющий распределение интенсивности в виде двух лепестков. В [6] экспериментально измерена угловая скорость вращения лазерного пучка, в сечении которого есть два локальных максимума интенсивности. Такие пучки называются двухлепестковыми пучками (ДЛП). В [7] с помощью фазового дифракционного элемента были сформированы вращающиеся лазерные пучки, состоящие из двух мод Бесселя с топологическими зарядами -1 и -3 . Скорость вращения ДЛП составила $0,006$ град/мкм. В [7] скорость вращения ДЛП, в отличие от [6], была постоянной. В [8] с помощью ДЛП точно (ошибка $1,6\%$) измерена глубина резкости изображения. В [9] предложено с помощью пространственного модулятора света формировать функцию рассеяния точки в виде двух лепестков, которые вращаются вокруг оптической оси при распространении в пространстве. С помощью оптимизационной процедуры был рассчитан фазовый элемент, эффективность которого при формировании ДЛП была равна 57% , хотя в эксперименте была достигнута эффективность только 37% . Сформированный ДЛП состоял из линейной комбинации многих мод ЛГ и сферической линзы с числовой апертурой $NA = 0,71$. При этом скорость вращения ДЛП вблизи фокуса в диапазоне от $-1,5$ мкм до $1,5$ мкм составляла 50 град/мкм. В [10] ДЛП, состоящий из двух пучков Бесселя, был сформирован с помощью жидкокристаллического модулятора. Скорость вращения была постоянной и равна $0,003$ град/мкм.

Из этого краткого обзора работ по вращающимся пучкам видно, что чаще всего для их формирования используют суперпозицию лазерных

мод — пучков Бесселя–Гаусса или Лагерра–Гаусса. Далее в книге будут часто использоваться эти хорошо известные в оптике модовые пучки, которые описываются функциями, являющимися точными решениями параксиального уравнения Гельгольца (уравнения типа Шредингера). Приведем выражения для комплексных амплитуд этих пучков.

Бездифракционные пучки Бесселя:

$$E_{n,m}(r, \varphi, z) = e^{ik_z z} J_n(\alpha_m r) e^{in\varphi}, \quad \alpha_m = \sqrt{k^2 - k_z^2}, \quad (B1)$$

где (r, φ, z) — цилиндрические координаты, z — оптическая ось, k — волновое число света, k_z — проекция волнового вектора на оптическую ось, $J_n(x)$ — функция Бесселя n -го порядка.

Пучки Бесселя–Гаусса:

$$E_{n,m}(r, \varphi, z) = q^{-1}(z) \exp\left(ikz - \frac{i\alpha_m^2 z}{2kq(z)}\right) \exp\left(-\frac{r^2}{\omega_0^2 q(z)} + in\varphi\right) J_n\left[\frac{\alpha_m r}{q(z)}\right], \quad (B2)$$

где $\alpha_m = k \sin \theta_m = (2\pi/\lambda) \sin \theta_m$ — масштабирующий множитель, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число света с длиной волны λ , θ_m — угол конической волны, формирующей пучок Бесселя, $q(z) = 1 + iz/z_0$, $z_0 = k\omega_0^2/2$ — длина Рэлея, ω_0 — радиус перетяжки гауссова пучка, $J_n(x)$ — функция Бесселя первого рода n -го порядка.

Пучки Лагерра–Гаусса:

$$E_{n,m}(r, \varphi, z) = \frac{w(0)}{w(z)} \left[\frac{\sqrt{2}r}{w(z)}\right]^{|n|} L_m^{|n|} \left[\frac{2r^2}{w^2(z)}\right] \times \exp\left[-\frac{r^2}{w^2(z)} + \frac{ikr^2}{2R(z)} - i(|n| + 2m + 1)\zeta(z) + in\varphi\right], \quad (B3)$$

где

$$\begin{aligned} w(z) &= \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2}, \\ R(z) &= z \left[1 + \left(\frac{z_0}{z}\right)^2\right], \\ \zeta(z) &= \arctg\left(\frac{z}{z_0}\right), \end{aligned} \quad (B4)$$

где (r, φ, z) — цилиндрические координаты, ω_0 — радиус перетяжки гауссова пучка, n — топологический заряд оптического вихря, $L_m^n(x)$ — присоединенный многочлен Лагерра, $w(z)$ — радиус гауссова пучка на расстоянии z от перетяжки, $R(z)$ — радиус кривизны волнового фронта гауссова пучка, $\zeta(z)$ — фаза Гоу.

Пучки Эрмита–Гаусса:

$$E_{n,m}(x, y, z) = i^{n+m} \left[\frac{\omega_0}{w(z)} \right]^2 H_n \left[\frac{\sqrt{2}x}{w(z)} \right] H_m \left[\frac{\sqrt{2}y}{w(z)} \right] \times \\ \times \exp \left[-\frac{x^2 + y^2}{w^2(z)} + \frac{ik(x^2 + y^2)}{2R(z)} \right] \times \\ \times \exp \left[-i(n + m + 1) \arctg \left(\frac{z}{z_0} \right) \right], \quad (B5)$$

где (x, y, z) — декартовы координаты, $H_n(x)$ — многочлен Эрмита.

Авторы выражают благодарность научному сотруднику Самарского университета д.ф.-м.н. А.П. Порфирьеву за помощь в проведении экспериментов по формированию вращающихся лазерных пучков, а также профессору Я. Турунену (Финская академия наук, Йоеенсуу, Финляндия) и доктору Л. О'Фаолейну (Институт технологии Корка, Ирландия) за помощь в изготовлении дифракционных оптических элементов.

Подготовка книги к изданию была поддержана грантом РФФИ 18-29-20003, а материал книги, основан на результатах, полученных, в том числе, по грантам РФФИ 18-29-20003, 18-07-01122, 18-07-01129, 18-07-01380, 15-37-20723, 15-07-01174, 14-29-07133.

Глава 1

ИНВАРИАНТНЫЕ ПУЧКИ И ПУЧКИ С ПРОДОЛЬНОЙ ПЕРИОДИЧНОСТЬЮ

1.1. Инвариантные лазерные пучки (эксперимент)

В 1980–1984 гг. научная группа под руководством академика А.М. Прохорова впервые рассмотрела проблему формирования лазерных световых полей с заранее заданными свойствами с помощью плоских дифракционных оптических элементов (ДОЭ) [11–15].

Работы по данной тематике в дальнейшем привели к созданию научного направления — компьютерная оптика. Был рассчитан, синтезирован и исследован целый класс новых оптических элементов — фокусаторы [11], моданы [13], элементы Бессель-оптики [15].

Основываясь на работах [11–15] в 1994–1998 гг. была создана теория многомодовых лазерных пучков, обладающих инвариантными свойствами [16–19]. То есть для разных модовых базисов (Бесселя, Лагерра–Гаусса, Эрмита–Гаусса) были найдены условия для выбора номеров мод, обеспечивающих формирование инвариантных лазерных пучков, которые при распространении в однородных и градиентных средах сохраняют свой вид (стабильные пучки), вращаются или периодически повторяются. Также был развит эффективный метод расчета фазовых многоуровневых ДОЭ, способных преобразовывать обычный гауссов лазерный пучок в пучки с инвариантными свойствами. Численное моделирование показало, что данные ДОЭ могут преобразовывать гауссов пучок в инвариантный с дифракционной эффективностью около 80% и со средним отклонением профиля интенсивности рассчитанного пучка от заданного около 20%. Был также разработан метод частичного кодирования [20], который позволяет снизить ошибку отклонения до 3% за счет уменьшения эффективности до 20%.

В данном разделе приводятся результаты экспериментального формирования лазерных инвариантных пучков с помощью фазовых бинарных или многоуровневых ДОЭ, изготовленных по технологии электронной литографии с помощью генератора изображений Leica LION LV1 с микрорельефом для длины волны 0,633 мкм.

Лазерные пучки со свойствами стабильности (бездифракционное распространение) и вращения (распространение с заданным угловым орбитальным моментом) могут быть применены, в частности, для манипулирования микрочастицами в биологии и нанотехнологии [21–23].

1.1.1. Самовоспроизведение как инвариантность к действию различных операторов. В теории волноводов существует понятие мод, которые обладают рядом замечательных свойств: 1) инвариантность к оператору распространения в своей среде, 2) сохранение ортогональности при распространении, 3) меньшие потери энергии для мод с меньшими индексами, 4) наилучшая среднеквадратичная аппроксимация полей, распространяющихся в данной среде.

Модовый состав когерентных световых полей определяет их поведение при распространении вдоль оптической оси. Условия на номера мод (табл. 1.1), обеспечивающие самовоспроизведение лазерных пучков, т. е. условия инвариантности по отношению к операторам распространения, масштаба и поворота, получены авторами [24] в простой форме и включают такие характеристики, как величина периода и скорость вращения.

Таблица 1.1. Условия самовоспроизведения многомодовых пучков

	Бесселя	Лагерра–Гаусса	Эрмита–Гаусса
Инвариантность к оператору распространения	$n = \text{const}, \forall m$	$2n + m = \text{const}$	$n + m = \text{const}$
Продольная периодичность при распространении	$n_1 \leq n \leq n_2,$ $\forall m, n_1, n_2$ — опред. параметрами	$2(n - n') + m - m' =$ $= \text{const} \cdot q,$ q — целое	$(n - n') +$ $+(m - m') =$ $= \text{const} \cdot q,$ q — целое
Поступательное вращение при распространении	$\frac{m - m'}{n - n'} =$ $= \text{const},$ $\forall n \neq n',$ $m \neq m'$	$\frac{2(n - n') + m - m' }{m - m'} =$ $= \text{const}$ $\forall n \neq n', m \neq m'$	Не обладают угловым моментом
Фурье-инвариантность	Не обладают	$2n + m = \text{const} + 4q,$ q — целое	$n + m = \text{const} + 4q,$ q — целое

Как видно из таблицы, наиболее «жесткие» ограничения накладываются на индексы функций, участвующих в композиции, для получения вращающихся пучков. Это связано с тем, что вращающиеся пучки сочетают в себе свойства инвариантных и периодически повторяющихся при распространении пучков.

Условие Фурье-инвариантности гауссовых мод очень похоже на условие инвариантности к оператору распространения и сводится к нему при $q = 0$.

Моды Лагерра–Гаусса обладают наибольшим спектром различных свойств самовоспроизведения.

1.1.2. Бездифракционные пучки Бесселя. Пучки с продольной периодичностью возникают в случае, когда несколько (не менее двух) конических волн с различными углами при вершине конуса распространяются вдоль оптической оси. В результате их интерференции вдоль оптической оси образуется интерференционная картина, амплитуда модуляции которой примерно постоянная на отрезке от ДОО до расстояния инвариантности z , которое выражается через радиус ДОО R и угол α наклона к оптической оси конических лучей: $z = R / \text{tg}(\alpha)$. При этом волна, распространяясь вдоль оптической оси, в своем поперечном сечении испытывает периодические изменения. Минимальный период интерференционной картины будет определяться максимальной разностью углов наклона различных конических волн.

Вопросы, связанные с решением задач синтеза фазовых оптических элементов, генерирующих световые поля с заданным продольным, в частности, продольно-периодическим, распределением интенсивности, рассматривались в [25]. Однако разработанные в этих работах алгоритмы позволяют рассчитывать фазовые ДОО, формирующие заданное продольное распределение интенсивности лишь на малом участке оптической оси. В [17, 18] рассматривается итеративный алгоритм расчета ДОО, формирующих световые поля с продольной периодичностью, обладающие модовым характером. Такие световые поля сохраняют периодичность, в принципе, вдоль всей оптической оси.

Исходя из геометрических соображений, расстояние, на котором сохраняется модовый характер одномодового бесселевого светового поля, оценивается следующей формулой:

$$z_{\text{max}}^n = R \left[\left(\frac{2\pi}{a_n \lambda} \right)^2 - 1 \right]^{1/2}, \quad (1.1)$$

где R — радиус ДОО, a_n — параметр Бесселя $J_m(a_n r)$.

Максимальным расстоянием, на котором сохраняется модовый характер многомодового пучка, является наименьшее из всех расстояний (1.1), рассчитанных для каждой моды, входящей в пучок.

В работе [26] показано, что при формировании бесселевых пучков голографическими оптическими элементами максимальное расстояние сохранения их модового характера увеличивается примерно в два раза по сравнению со способом формирования бесселевых пучков с помощью узкой щели. Однако, нужно некоторое расстояние от плоскости голографического оптического элемента, чтобы пучок сформировался. Таким образом отрезок оптической оси, на котором многомодовый бесселев пучок, формируемый конечным фазовым ДОО, сохраняет свой модовый характер, начинается с некоторого z_{min} , необходимого для формирования пучка, и заканчивается на z_{max} , определяемого

физическим размером ДОЭ и параметрами бесселевого пучка. Изменяя радиус ДОЭ R , масштаб мод и модовый состав пучка можно увеличивать z_{\max} до желаемой величины.

Для формирования стабильных (период повторения равен нулю) бездифракционных бесселевых пучков можно использовать: интерферометр Фабри–Перо; узкую кольцевую щель в экране, расположенном на фокусном расстоянии перед сферической линзой; бинарные амплитудные голограммы с несущей пространственной частотой; а также амплитудные и фазовые дифракционные аксиконы.

Чтобы сформировать инвариантный к распространению многомодовый бесселев пучок с заданным вкладом каждой отдельной моды, можно воспользоваться итеративной процедурой [18], разработанной для заданной композиции мод. Свойствами близкими к бездифракционным пучкам обладают и другие типы световых полей, амплитуда которых описывается функциями Бесселя второго рода, или функциями Неймана. Близкие к бездифракционным пучкам световые поля можно сформировать амплитудными дифракционными элементами, которые рассчитываются по некоторым специальным итеративным процедурам.

Для формирования стабильного многомодового бесселевого пучка нужно обеспечить, чтобы индексы мод (n, m) , участвующих в композиции, удовлетворяли условию: $n = \text{const} \forall m$, т. е. все функции Бесселя $J_m(\alpha_n r)$ должны иметь одинаковый масштаб $\alpha_n = \alpha$, в то время как порядок m может быть произвольным.

Частным случаем стабильного пучка является одномодовый пучок. Фазовый ДОЭ в этом случае можно получить из амплитудно-фазового заменой амплитуды на единичную. Для бесселевых мод такой ДОЭ фактически представляет собой либо бинарный ($m = 0$), либо винтовой ($m \neq 0$) аксикон.

Для формирования лазерных многомодовых пучков с различными свойствами самовоспроизведения, приведенными в табл. 1.1, были рассчитаны высокоэффективные фазовые ДОЭ (более 80% энергии освещающего пучка идет на формирование модового пучка). Оптические элементы были изготовлены на технической базе Университета Йёнсуу, Финляндия (в группе проф. Яри Турунена) методом электронной литографии при использовании электронного генератора изображений Leica LION LV1, обеспечивающего предельное разрешение около 0,04 микрона. С помощью электронного луча в слое полиметилметакрилата (ПММА), осажденного на подложке из плавленого кварца, рисуется изображение в соответствии с топологией фазового рельефа элемента. После операции проявления осаждением в вакууме на поверхность структуры с изображением наносится слой хрома. Затем используется процедура вымывания оставшегося резиста на основе ПММА вместе со слоем хрома из областей, не подвергшихся экспонированию. И, наконец, с помощью реактивного ионного травления, при

котором слой хрома выступает в качестве защитной маски, в кварце создается требуемый профиль микрорельефа.

Схема эксперимента с изготовленными ДОЭ приведена на рис. 1.1. Чтобы получить освещающий пучок, близкий к расчетному, излучение из He–Ne лазера 1 коллимируется 2 и диафрагмируется 3. За плоскостью ДОЭ 4 интенсивность сформированных полей на различных расстояниях z регистрируется с помощью подвижной ПЗС-камеры 6 и поступает в компьютер. Распределение интенсивности в дальней зоне дифракции измеряется при установке ПЗС-камеры 6 в фокальную плоскость дополнительной линзы 5. Параметры рабочего окна ПЗС-камеры следующие: $6,6 \times 4,8 \text{ мм}^2$ (768×567 ячеек), ячейка $8,6 \times 8,5 \text{ мкм}^2$.

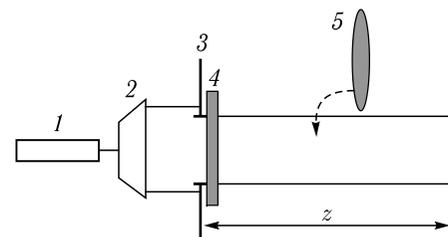


Рис. 1.1. Оптическая схема эксперимента: 1 — He–Ne лазер, 2 — коллиматор, 3 — диафрагма, 4 — фазовый ДОЭ, 5 — сферическая линза, 6 — ПЗС-камера

На рис. 1.2 показаны экспериментальные результаты формирования стабильного бесселевого пучка $w(r, \varphi) = J_{-3}(120,5r)e^{-i3\varphi} + J_3(120,5r)e^{i3\varphi}$ бинарным ДОЭ (а) $2 \times 2 \text{ мм}$ и распределения интенсивности на различных расстояниях от плоскости ДОЭ: 30 мм (б), 40 мм (в), 50 мм (г), 70 мм (д), 80 мм (е), 90 мм (ж). Из рис. 1.2 видно, что хотя яркость центральной части увеличивается (это связано с фазовым характером ДОЭ), модовый характер пучка, т. е. распространение без изменения структуры сечения пучка, сохраняется вплоть до $z = 80 \text{ мм}$ (рис. 1.2, е). Теоретическое значение $z_{\max} = 83 \text{ мм}$.

На рис. 1.3 приведены экспериментальные результаты формирования трех-модового продольно-периодического бесселевого пучка: $w(r, \varphi) = J_{-2}(50,44r)e^{-i2\varphi} + J_0(83,27r) + J_2(50,44r)e^{i2\varphi}$. На рис. 1.3, а показана рассчитанная фаза ДОЭ, а на рис. 1.3, б–е экспериментально зафиксированные распределения интенсивности на отрезке оптической оси, равном периоду $z_0 = 20 \text{ мм}$, расстояния от плоскости ДОЭ: 85 мм (б), 90 мм (в), 95 мм (г), 100 мм (д), 105 мм (е). Видно, что распределения интенсивности, разделенные расстоянием, равным периоду (см. рис. 1.3, б и рис. 1.3, е) одинаковые, в то время как в остальных случаях они различны.

Вращение поперечного сечения светового бездифракционного пучка Бесселя является частным случаем продольной периодичности

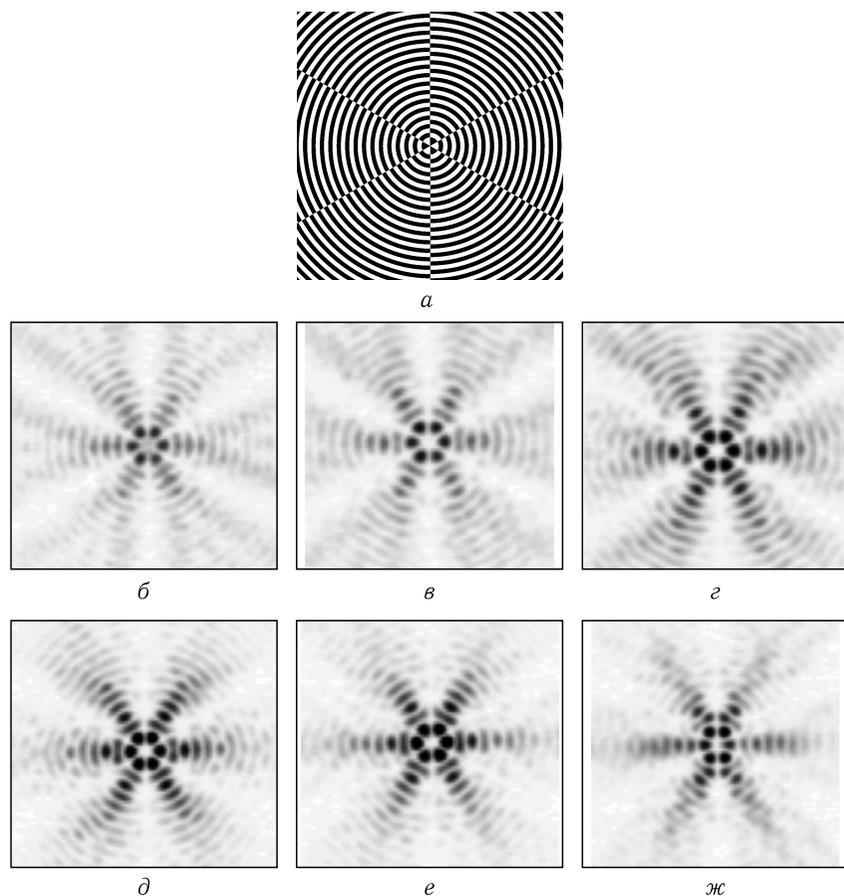


Рис. 1.2. Фаза ДОЭ (а), формирующего двухмодовый стабильный пучок Бесселя и экспериментально зафиксированные распределения интенсивности на различных расстояниях от плоскости ДОЭ (б–ж). Размер всех кадров (б–ж) 0,71 мм

и обеспечивается согласованным выбором отличных от нуля слагаемых с разными номерами n и m (табл. 1.1).

На рис. 1.4 приведены экспериментальные результаты формирования пяти-модового вращающегося бesselевого пучка с номерами (n, m) : $(-2, -8)$, $(-1, -4)$, $(0, 0)$, $(1, 4)$, $(2, 8)$ и периодом вращения $z_0 = 1600$ мм. Интенсивность в сечении такого пучка имеет симметричную структуру и не изменяется при повороте на 90 градусов вокруг оси пучка, т.е. такой пучок будет повторяться через каждые четверть периода $z_0/4$. Полученная амплитудно-фазовая функция пропускания $w(r, \varphi) = 3J_{-8}(35, 3r) e^{-i8\varphi} + 2J_{-4}(31, 2r) e^{-i4\varphi} + J_0(26, 4r) +$

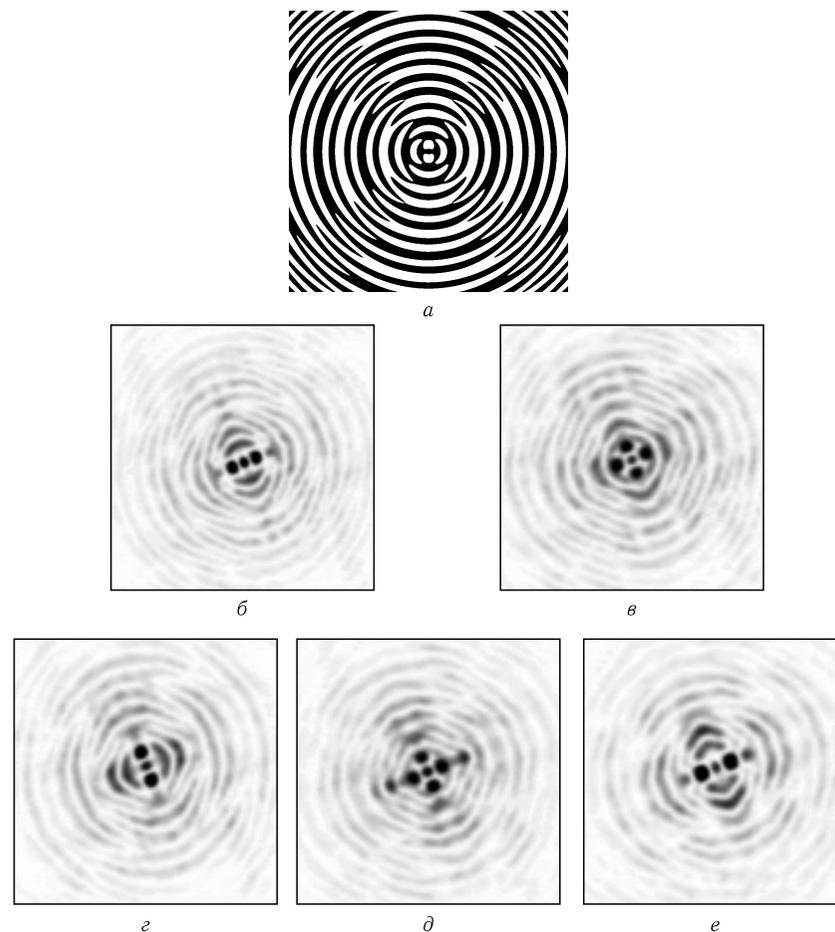


Рис. 1.3. Фаза ДОЭ (а) для трех-модового периодического бesselевого пучка и экспериментальные распределения интенсивности на отрезке оптической оси, равном периоду $z_0 = 20$ мм (б–е). Размер всех кадров (б–е) 0,81 мм

$+ 2J_4(20, 6r) e^{i4\varphi} + 3J_8(12, 1r) e^{i8\varphi}$ была закодирована в чисто фазовую методом частичного кодирования [20] при значении порога $\alpha = 0,9$.

На рис. 1.4 показаны: (а) фаза кодированного 16-градационного ДОЭ размером 6×6 мм, (б–е) экспериментально зафиксированные распределения интенсивности на отрезке оптической оси, равном четверти периода $z_0/4 = 400$ мм. Расстояния от плоскости ДОЭ: 450 мм (б), 550 мм (в), 675 мм (г), 775 мм (д), 850 мм (е).

Из рис. 1.4 видно, что картина поперечного сечения вращается как единое целое и, благодаря симметрии ($T = 4$), повторяется через четверть периода $z_0/4$. Теоретическое расстояние сохранения

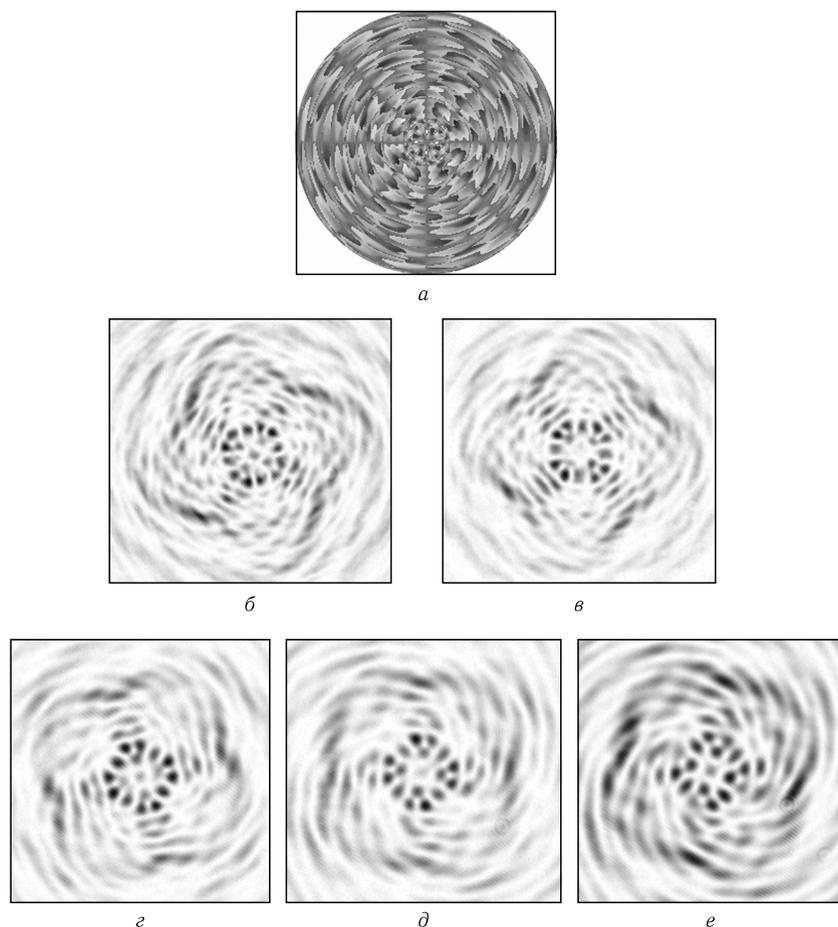


Рис. 1.4. Кодированная фаза ДОО (а) и экспериментально зафиксированные (б–е) распределения интенсивности на отрезке оптической оси, равном четверти периода. Размер всех кадров (б–е) 2,27 мм

модовых свойств такого пучка, рассчитанное по формуле (1.1), равно $z_{\max} = 850$ мм. При этом пучок сохраняет свои модовые свойства вплоть до $z = 875$ мм, хотя начинает формироваться с $z_{\min} = 325$ мм.

1.1.3. Гауссовы пучки. Бесселевы функции являются модами свободного пространства. Гауссовы моды — Лагерра–Гаусса (ЛГ) и Эрмита–Гаусса (ЭГ) — являются модами оптического волокна с квадратичной зависимостью показателя преломления [27]. Однако гауссовы моды сохраняют свою структуру и в свободном пространстве, изменяясь лишь масштабно.

Многомодовые гауссовы пучки могут, аналогично бесселевым пучкам, обладать свойствами самовоспроизведения. Нужно заметить, что моды ЭГ не имеют винтовой составляющей $\exp(im\varphi)$, поэтому частный случай вращающихся пучков рассматривается только для многомодовых пучков ЛГ.

Нужно заметить, что для двумодового пучка с $n' \neq n$, $m' \neq m$ условие вращения выполняется всегда. Методика выбора индексов для существенно многомодовых гауссовых пучков с определенными

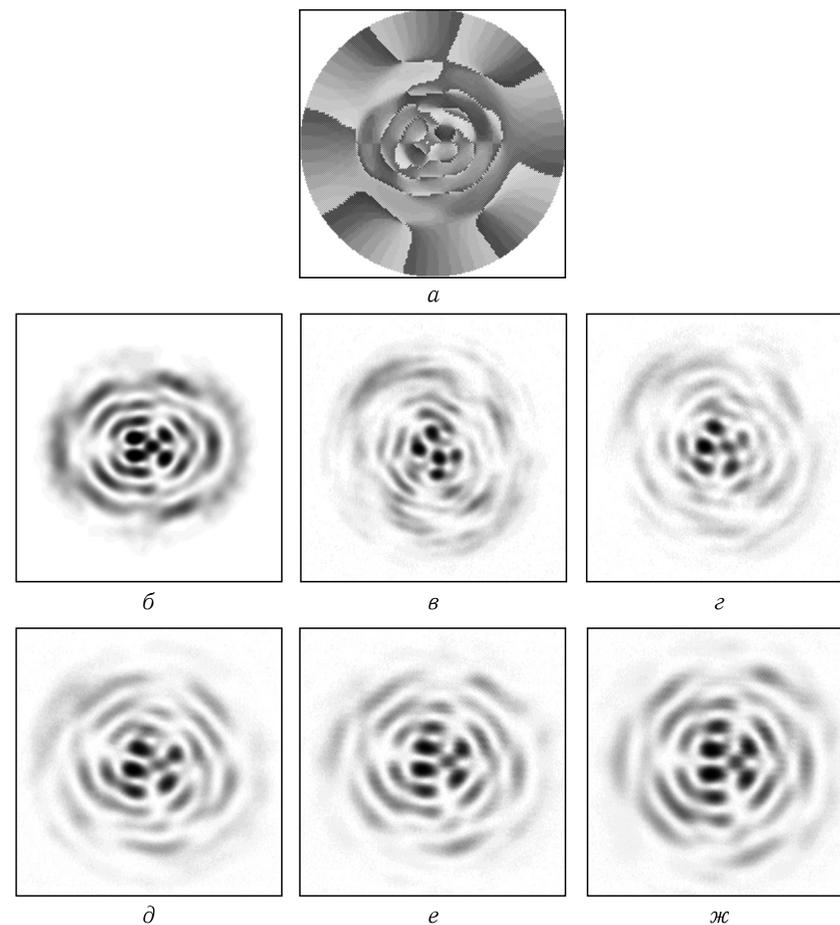


Рис. 1.5. Экспериментальные результаты формирования 5-модового вращающегося пучка ЛГ: фаза ДОО (а), рассчитанное распределение интенсивности в Фурье-плоскости (б), экспериментально зафиксированное поперечное сечение пучка на разных расстояниях z : 300 мм (в), 400 мм (г), 500 мм (д), 600 мм (е), 700 мм (ж). Размер всех кадров (б–ж) 3,36 мм

свойствами подробно рассматривается в [19,24], и результаты сведены в табл. 1.1.

На рис. 1.5 показаны результаты экспериментального формирования пяти-модового пучка ЛГ с коэффициентами: $C_{2,-2} = -1$, $C_{3,-1} = -1,5$, $C_{4,0} = 1$, $C_{4,2} = 1$, $C_{4,4} = 1,5$. Условие вращения выполняется, и $T = 1$. Общее число оборотов $N = T/4 = 0,25$, т. е. картина в сечении пучка повернется на расстоянии от $z = 0$ до $z = \infty$ на 90° .

На рис. 1.5, *а* показана фаза 16-градационного кодированного ДОЭ, радиус которого $R = 1,5$ мм. На рис. 1.5, *б* показано рассчитанное распределение интенсивности в дальней зоне, полученное с помощью преобразования Фурье. На рис. 1.5, *в-ж* приведены экспериментально зафиксированные с помощью ПЗС камеры (оптическая схема приведена на рис. 1.1) распределения интенсивности в поперечном сечении пучка на различных расстояниях от плоскости ДОЭ, освещенного коллимированным излучением He-Ne лазера: $z = 300$ мм (*в*), $z = 400$ мм (*г*), $z = 600$ мм (*д*), $z = 700$ мм (*е*), $z = 700$ мм (*ж*).

Из рис. 1.5 видно, что картина поперечного сечения 5-модового пучка ЛГ вращается как единое целое с замедлением скорости вращения. Видно, что на расстоянии $z = 300$ мм (рис. 1.5, *в*) из-за фазового характера ДОЭ пучок еще не полностью сформировался. Среднеквадратичное отклонение экспериментальных результатов от теоретических на отрезке оптической оси от 600 мм до 700 мм составило не более 18%.

На рис. 1.6 показана бинарная фаза (*а*) и интенсивность (*б*) в плоскости $z = 0$ (размер соответствует размеру апертуры 1 мм), рассчитанные для четырехмодового пучка ЭГ $(0, 1) + (1, 0) + (1, 11) + (11, 10)$.

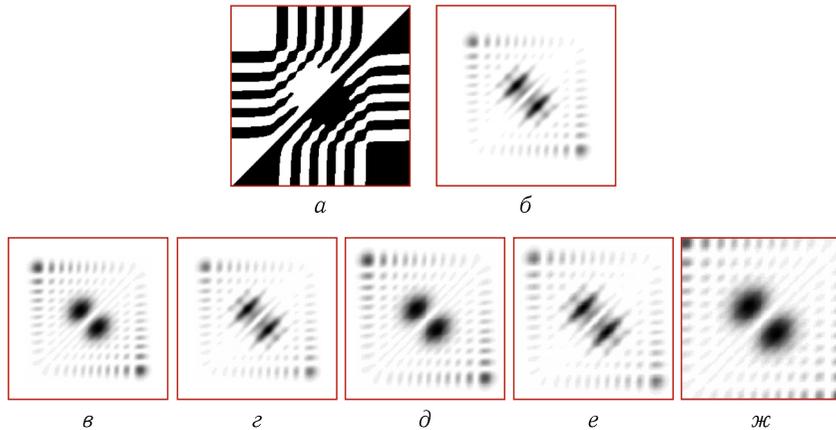


Рис. 1.6. Бинарная фаза (*а*) (белый — 0, черный — π), и интенсивность (*б*) в плоскости $z = 0$, и распределения интенсивности на плоскостях: $z = 12$ мм (*в*), $z = 16,24$ мм (*г*), $z = 30,63$ мм (*д*), $z = 36,33$ мм (*е*), $z = 58,53$ мм (*ж*)

На рис. 1.6, *в-е* показаны распределения интенсивности на разных расстояниях: $z = 12$ мм (*в*), $z_{1,20}(0) = 16,24$ мм (*г*), $z_{1,20}(12) = 30,63$ мм (*д*), $z_{2,20}(0) = 36,33$ мм (*е*), $z_{2,20}(12) = 58,53$ мм (*ж*) (размер каждого кадра равен 0,97 мм). Из рис. 1.6 видно, что картины интенсивности при $z = 0$ (*б*), $z = 16,24$ мм (*г*) и $z = 36,33$ мм (*е*) совпадают с точностью до масштаба. Такое же совпадение наблюдается для расстояний $z = 12$ мм (*в*), $z = 30,63$ мм (*д*) и $z = 58,53$ мм (*ж*).

1.1.4. Формирование самовоспроизводящихся лазерных пучков в дифракционных порядках. ДОЭ, формирующие несколько модовых пучков в разных дифракционных порядках применяются как пространственные фильтры для анализа поперечного модового состава света и для одновременного ввода света в набор волокон [28].

Если ДОЭ, у которого функция пропускания представлена в виде линейной комбинации ограниченного числа базисных функций $\Psi_{nm}(x, y)$ с различными несущими пространственными частотами:

$$\tau(x, y) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M \Psi_{nm}^*(x, y) \exp[i(\alpha_{nm}x + \beta_{nm}y)], \quad (1.2)$$

совмещен со сферической линзой и освещен световой волной $W(x, y)$, то интенсивность света в заданных точках фокальной плоскости с пространственными частотами $(\alpha_{nm}, \beta_{nm})$ будет приближенно пропорциональна квадратам модулей коэффициентов разложения w_{nm} светового поля по этому базису:

$$w(x, y) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M w_{nm} \Psi_{nm}(x, y). \quad (1.3)$$

Если функции $\Psi_{nm}(x, y)$ Фурье-инвариантны, то в фокальной плоскости линзы будут зарегистрированы дифракционные порядки, интенсивность которых пропорциональна интенсивности базисных функций $|\Psi_{nm}(x, y)|^2$.

На рис. 1.7, *а* показана фаза 25-канального 16-уровневого ДОЭ для оптического разложения световых полей по модам ЭГ, $n, m = \overline{0, 4}$. На рис. 1.7, *б* приведено экспериментально зарегистрированное распределение интенсивности в фокальной плоскости сферической линзы при освещении ДОЭ коллимированным пучком He-Ne лазера.

С помощью многоканальных ДОЭ, согласованных с базисом мод ЭГ, можно осуществить эксперимент по селекции (выделению) отдельных мод из многомодового пучка.

Оптическая схема эксперимента приведена на рис. 1.8. Пучок He-Ne лазера 1 после коллиматора 2 и диафрагмы 3 падает на фазовый многоканальный ДОЭ 4, который формирует несколько дифракционных порядков. На расстоянии d_1 от плоскости ДОЭ 4 желаемый дифракционный порядок выделялся с помощью диафрагмы 6.

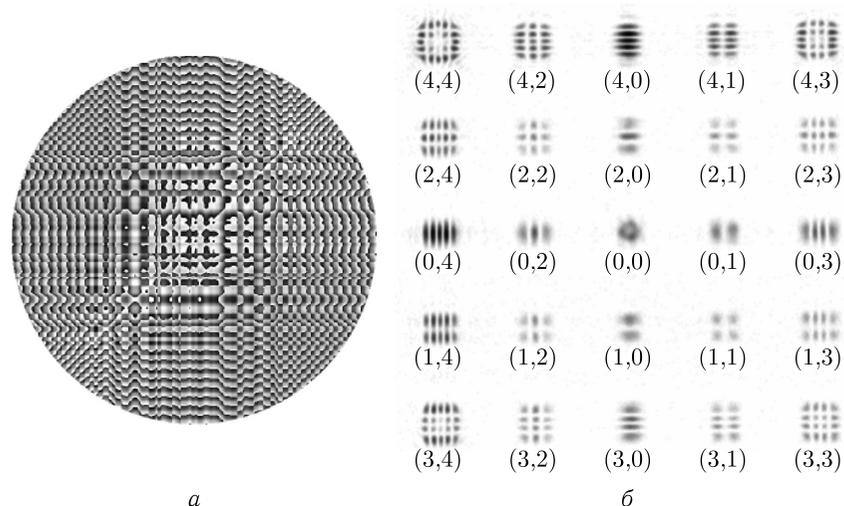


Рис. 1.7. Фаза 25-канального ДОЭ (а), согласованного с модами ЭГ и экспериментально зарегистрированное распределение интенсивности ($3,38 \times 3,38$ мм) в спектральной плоскости (б) при освещении ДОЭ коллимированным пучком лазера

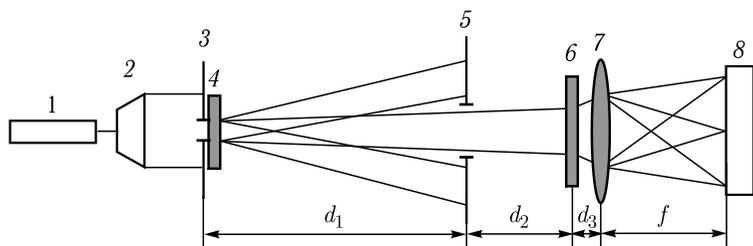


Рис. 1.8. Оптическая схема эксперимента с двумя многоканальными ДОЭ, согласованными с модами ЭГ

Расстояние d_1 выбирается так, чтобы в плоскости 5 дифракционные порядки достаточно разошлись и не перекрывали друг друга. Затем выбранный порядок проходит еще расстояние d_2 и попадает на второй фазовый многоканальный ДОЭ 6, который используется как согласованный фильтр и находится на расстоянии d_3 перед сферической линзой 7 с фокусным расстоянием f . Для регистрации интенсивности пространственного спектра в плоскости 8 можно выбирать расстояние $d_3 \neq f$ между ДОЭ 6 и линзой 7 произвольно. Распределение интенсивности в задней фокальной плоскости линзы 7 фиксировалось с помощью ПЗС-камеры 8, соединенной с компьютером.

С помощью различных ДОЭ, помещаемых в позицию 4, формировались световые поля, являющиеся композиций мод ЭГ с индекса-

ми (n, m) : (0, 1) (рис. 1.9, а), (2, 4) (рис. 1.9, б), (0, 0) + (2, 2) + (4, 4) (рис. 1.9, в). Затем сформированные световые пучки попадали на многоканальный ДОЭ (см. рис. 1.7, а), установленный в позиции б.

На рис. 1.9, г приведены результаты оптического разложения для светового пучка эффективно состоящего из моды ЭГ (0,1). При этом в фокальной плоскости линзы возникает корреляционный пик в соответствующем дифракционном порядке, а в центрах других дифракционных порядков наблюдается нулевая интенсивность. На рис. 1.9, д хорошо виден корреляционный пик, соответствующий моде (2, 4). Причем этот пик более мощный (отношение корреляционного сигнала к средней интенсивности фона составило $S/N = 60$), чем в случае моды (0, 1) (в этом случае $S/N = 47$).

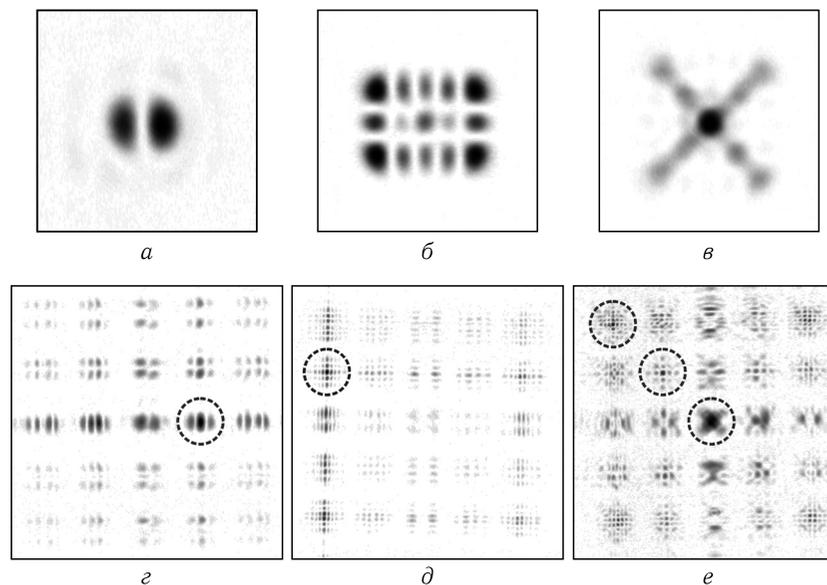


Рис. 1.9. Результаты экспериментов по оптическому разложению световых полей с помощью 25-канального ДОЭ, согласованного с модами ЭГ. Расположение отдельных мод с разными номерами в плоскости регистрации даны на рис. 1.7. Максимальные значения интенсивности обведены кружком

На рис. 1.9, е показаны результаты оптического разложения трехмодового пучка ЭГ (0, 0) + (2, 2) + (4, 4). Присутствуют все три корреляционных пика.

Чем больше членов участвует в линейной комбинации (1.2), т.е., чем больше степеней свободы, которыми являются аргументы ненулевых коэффициентов композиции, тем лучше сходится итерационный процесс расчета ДОЭ. Увеличить число степеней свободы многоканального ДОЭ можно либо за счет увеличения числа

каналов, либо за счет увеличения количества мод в каждом полезном дифракционном порядке.

Первый путь имеет ограничения, связанные с уменьшением зон микрорельефа при увеличении несущих частот для разделения большего числа каналов. Второй путь свободен от этого недостатка и позволяет не только улучшить сходимость итерационного процесса расчета ДОЭ, но и расширяет множество формируемых пучков. Так, при формировании в каждом дифракционном порядке многоканального фазового ДОЭ не одномодового, а многомодового пучка, можно воспользоваться всеми результатами, полученными для самовоспроизводящихся суперпозиций, и управлять свойствами сразу нескольких пучков.

Нужно заметить, что группы гауссовых мод, удовлетворяющие условию равенства фазовых скоростей, также будут являться модой. Так как такая группа обладает всеми свойствами отдельной гауссовой моды: ортогональность, инвариантность к оператору распространения и преобразованию Фурье.

Наиболее простой модовой гауссовой группой является сумма двух мод со взаимно-противоположными угловыми гармониками $\exp(\pm i|m|\varphi)$.

На рис. 1.10 показаны экспериментальные результаты по формированию двадцати четырех модовых групп пучков ЛГ в различных дифракционных порядках с помощью 16-градационного фазового ДОЭ. Эти пучки представляют собой модовые группы ЛГ с номерами $(n, \pm|m|)$: $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1) + (1,-1)$, $(2,0)$, $(2,1) + (2,-1)$, $(2,2) + (2,-2)$, $(3,0)$, $(3,1) + (3,-1)$, $(3,2) + (3,-2)$, $(3,3) + (3,-3)$, $(4,0)$, $(4,1) + (4,-1)$, $(4,2) + (4,-2)$, $(4,3) + (4,-3)$, $(4,4) + (4,-4)$, $(5,0)$, $(5,1) + (5,-1)$, $(5,2) + (5,-2)$, $(5,3) + (5,-3)$, $(5,4) + (5,-4)$, $(5,5) + (5,-5)$, $(6,0)$, $(6,1) + (6,-1)$, $(6,2) + (6,-2)$.

На рис. 1.11, *a, б, в, г* показаны более крупным планом экспериментально зарегистрированные порядки 24-канального ДОЭ, соответствующие модовым группам $(2,2) + (2,-2)$, $(3,3) + (3,-3)$, $(4,4) + (4,-4)$, $(6,1) + (6,-1)$. Для подтверждения модового характера сформированных пучков с помощью диафрагмы выделялся один из дифракционных порядков и пропускался через еще одну сферическую линзу. Картины после второго Фурье-каскада приведены на рис. 1.11, *д, е, ж, з*, соответственно. Видно, что сформированные пучки сохраняют свою структуру (геометрическое отклонение не выше 3%), демонстрируя модовые свойства инвариантности к оператору распространения и преобразованию Фурье.

1.1.5. Обнаружение угловых гармоник. Комплексную амплитуду произвольного светового поля можно разложить в цилиндрических координатах по угловым гармоникам. Угловая гармоника (УГ) $\exp(im\varphi)$ — это комплексная экспонента, аргумент которой линейно

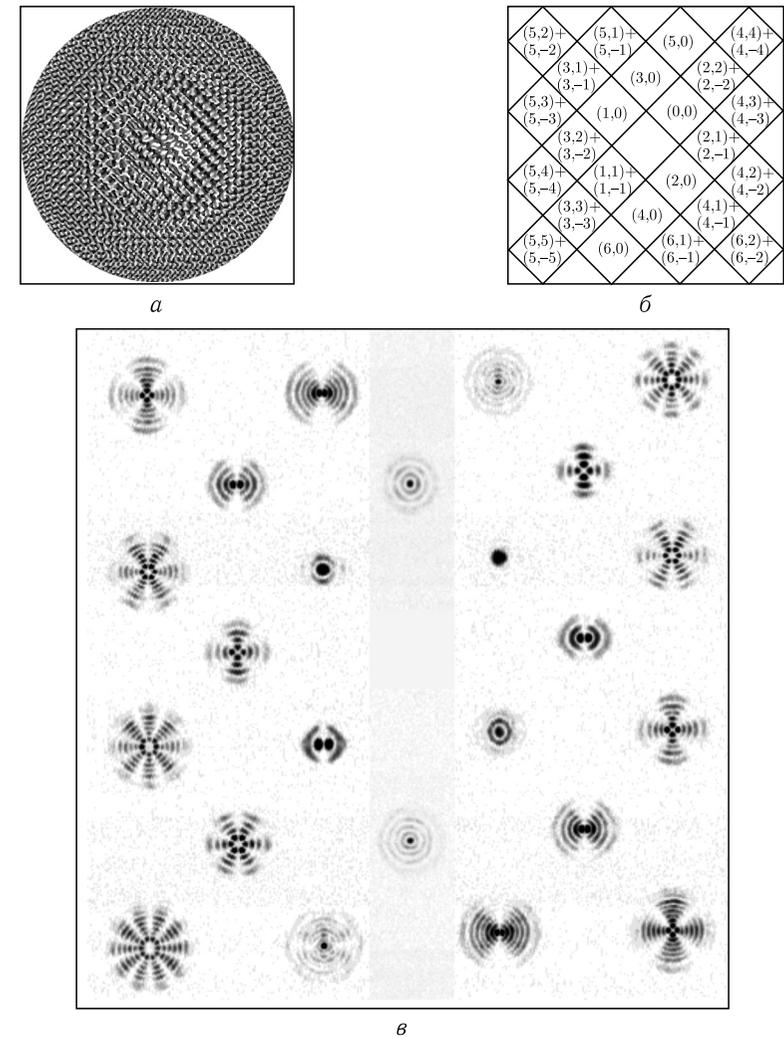


Рис. 1.10. Фаза ДОЭ (*a*), схема соответствия дифракционных порядков номерам мод в группах (*б*) и экспериментальные результаты по формированию 24 модовых групп ЛГ (*в*)

зависит от полярного угла φ , причем коэффициент пропорциональности — целое число m — номер УГ.

Угловая гармоника описывает сингулярность фазы волнового фронта, так как при обходе вокруг центра полярной системы координат фаза приобретает набег, равный $2\pi m$, m — номер УГ. УГ производились с помощью различных оптических элементов [21, 22, 29, 30]:

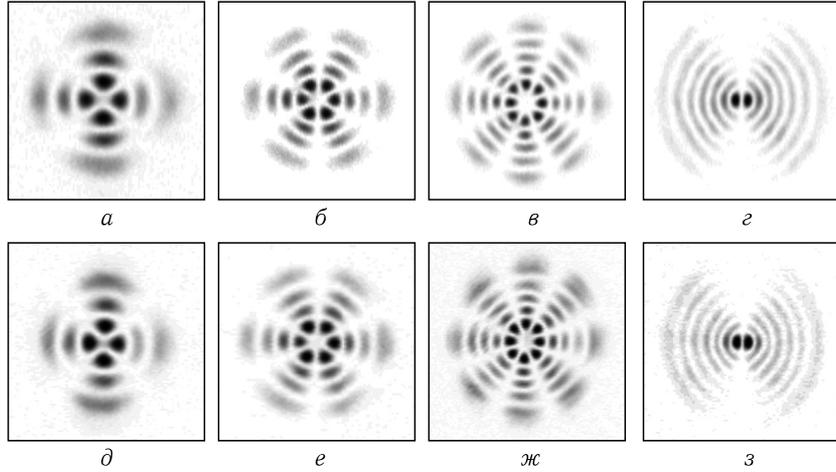


Рис. 1.11. Дифракционные порядки, соответствующие модовым группам $(2, 2) + (2, -2)$ (а), $(3, 3) + (3, -3)$ (б), $(4, 4) + (4, -4)$ (в), $(6, 1) + (6, -1)$ (г) в 24-канальном ДОЭ, и их Фурье-спектры (д, е, ж, з). Размер кадров $1,06 \times 1,06$ мм (а, б, в, г) и $1,06 \times 1,24$ мм (д, е, ж, з)

цифровых голограмм, амплитудных дифракционных решеток и фазовых ДОЭ, а также в составе мод Бесселя и ЛГ на выходе резонатора лазера, в составе квази-модовых пучков. Линейные комбинации из УГ формировались с помощью амплитудных и фазовых ДОЭ для демонстрации эффектов вращения световых пучков [18, 19, 29]. Оптическое разложение светового поля по ортогональному базису, согласованному с модами ЛГ и Бесселя рассматривалось в [31].

Ниже приводятся результаты эксперимента по селекции с помощью фазовых ДОЭ, согласованных с УГ, входящих в состав модовых лазерных пучков ЛГ. В [32] задача селекции решалась с помощью амплитудного трехканального фильтра, представлявшего собой дифракционную решетку со сбоем, и выделявшего УГ ± 1 -го порядков. В данном разделе рассмотрен эксперимент с бинарным фазовым 8-ми канальным ДОЭ, который обнаруживает УГ с номерами $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$. УГ являются собственными функциями оператора углового момента $\mathbf{M} = \partial/\partial\varphi$ и образуют ортонормированный базис:

$$\Psi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(im\varphi). \quad (1.4)$$

Пропускание многоканального ДОЭ, осуществляющего оптическое разложение светового поля (1.2) по базису УГ имеет вид:

$$\tau(r, \varphi) = \sum_{m=-M}^M C_m \exp \left[-im\varphi + i \frac{2\pi}{\lambda f} r \rho_m \cos(\varphi - \theta_m) \right], \quad (1.5)$$

где f — фокусное расстояние линзы, выполняющей Фурье-преобразование.

На рис. 1.12 показаны результаты эксперимента по селекции УГ мод ЛГ: распределение интенсивности в Фурье-плоскости (рис. 1.12, д, е, ж, з) при освещении ДОЭ б (рис. 1.8) пучками ЛГ с номерами мод (n, m) : $(2, 0)$ (рис. 1.12, а); $(3, 1)$ (рис. 1.12, б); $(3, -3) + (3, 3)$ (рис. 1.12, в); $(4, -4) + (4, 4)$ (рис. 1.12, г).

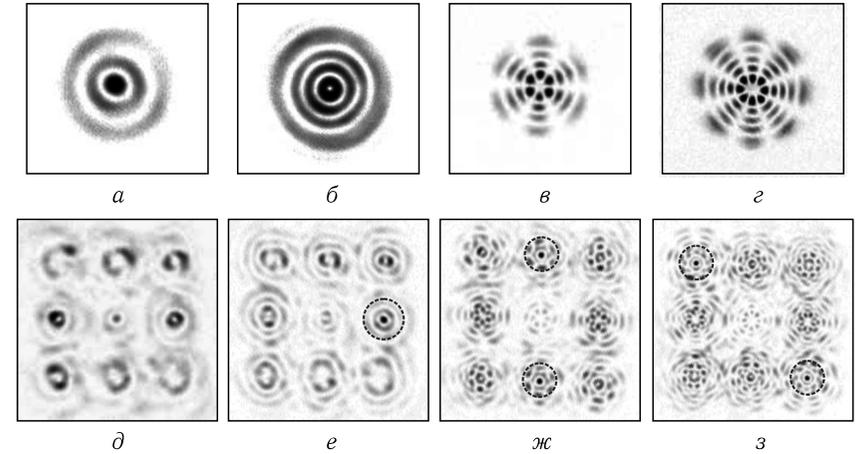


Рис. 1.12. Результат эксперимента по селекции УГ (д, е, ж, з) для соответствующих пучков ЛГ с номерами мод (n, m) : $(2, 0)$ (а); $(3, 1)$ (б); $(3, -3) + (3, 3)$ (в); $(4, -4) + (4, 4)$ (г). Кружками указаны максимумы интенсивности, которые возникают в местах, соответствующих определенным угловым гармоникам

На рис. 1.12, д, е, ж, з видно, что в центральных точках соответствующих порядков имеет место максимум интенсивности, который является откликом на соответствующую УГ, независимо от типа и масштаба светового поля.

В данном разделе приведены экспериментальные результаты по формированию и селекции лазерных многомодовых пучков с инвариантными свойствами. Лазерные пучки такого рода могут сохранять структуру распределения интенсивности в своем сечении (с возможными лишь масштабными изменениями), могут периодически повторяться или вращаться. Уникальные возможности для формирования таких пучков дают фазовые дифракционные оптические элементы. При этом более 80% энергии освещающего пучка идет на формирование модового пучка. Понятно, что фазовый элемент не может в точности сформировать модовое амплитудно-фазовое распределение со 100%-й эффективностью. Реально в сформированном лазерном пучке кроме заданных мод (одной или нескольких) всегда будут присутствовать моды других порядков, но совокупная доля их

энергии составляет не более 20% энергии всего пучка. ДОЭ с такими характеристиками могут быть использованы для решения ряда практических задач, например, для ввода излучения в волокно, для разделения мод на выходе многомодового волокна, для управляемой манипуляции микрочастицами в нанотехнологии.

1.2. Чистые оптические вихри

Давно известны и нашли широкое применение в оптике моды Эрмита–Гаусса (ЭГ) и Лагерра–Гаусса (ЛГ), которые являются частными решениями параксиального волнового уравнения (ПВУ) (или уравнения Шредингера) в декартовых и цилиндрических координатах [33]. Они являются поперечными модами стабильных лазерных резонаторов. Эти моды сохраняют свою структуру (распределение интенсивности и фазы в поперечном сечении), изменяясь при распространении вдоль оптической оси только масштабно. Эти моды также образуют ортогональный базис, так что с помощью линейной комбинации этих мод можно строить другие решения ПВУ.

В цилиндрических координатах ПВУ имеет и другие модовые решения, которые так же, как и моды ЭГ и ЛГ, сохраняют свою структуру, меняясь только масштабно. Это параксиальные моды Бесселя [34], которые надо отличать от непараксиальных бездифракционных пучков Бесселя, которые являются решениями уравнения Гельмгольца [35] и здесь не рассматриваются. В отличие от гауссовых мод моды Бесселя имеют бесконечную энергию (хотя конечную интенсивность в каждой точке пространства) и расходятся линейно. То есть эффективный диаметр пучка Бесселя линейно возрастает с увеличением расстояния вдоль оптической оси от начальной плоскости. Известно, что гауссовые моды расходятся параболически, и только при большом удалении от начальной плоскости радиус гауссового пучка растет тоже линейно с ростом расстояния вдоль оптической оси.

В последнее время были введены в рассмотрение новые модовые решения ПВУ [36–40], которые изучались теоретически [36–39] и экспериментально [40]. Это световые пучки Айнса–Гаусса. Они являются решениями ПВУ в эллиптических координатах. В этих координатах ПВУ решается методом разделения переменных, и решение получается в виде произведения гауссовой функции на многочлены Айнса. Сами же многочлены Айнса являются решениями уравнения Уиттекера–Хилла [34]. Моды Айнса–Гаусса (АГ) являются ортогональным базисом, обобщающим моды ЭГ и ЛГ. Когда эллиптические координаты переходят в цилиндрические (эллипсы переходят в окружности), то моды АГ переходят в моды ЛГ, а при стремлении эксцентриситета эллипсов к бесконечности (эллипсы переходят в отрезок прямой) моды АГ переходят в моды ЭГ.

Заметим, что в [41] исследовались астигматические лазерные пучки, названные модами Эрмита–Лагерра–Гаусса, которые также при определенном значении параметра (угла поворота цилиндрической линзы вокруг оптической оси) переходят в обычные моды ЭГ и ЛГ.

В данном разделе рассмотрен еще один тип модовых решений ПВУ в цилиндрических координатах, которые также сохраняют свою структуру, изменяясь только масштабно. Расходимость этих мод гиперболическая, т.е. при большом удалении от начальной плоскости эти пучки расходятся слабее, чем гауссовые и бесселевые пучки. Так как функции, описывающие эти моды, содержат вырожденную гипергеометрическую функцию, то мы назвали их гипергеометрическими (ГГ) модами. Они, как и параксиальные моды Бесселя, обладают бесконечной энергией. На практике их можно сформировать только на конечном расстоянии с помощью спиральной фазовой пластины [42–44], освещенной плоской волной. Так как у любой ГГ моды всегда (кроме начальной плоскости) в центре (на оптической оси) имеется нуль интенсивности, характерный для оптических вихрей [45], и ни освещающий пучок, ни сама спиральная пластинка не вносят дополнительной расходимости в пучок, то эти моды можно считать «чистыми» вихрями.

В работе установлено, что найденные решения являются однопараметрическим семейством более общего двухпараметрического класса решений ПВУ в цилиндрических координатах [34]. Впервые о гипергеометрических модах, по видимому, упоминалось в [42, 46].

1.2.1. Чистые вихри — инвариантные пучки с минимальной расходимостью. ПВУ в цилиндрических координатах имеет вид:

$$\left(2ik \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right) E(r, \theta, z) = 0, \quad (1.6)$$

где (r, θ) — поперечные полярные координаты, z — координата, направленная вдоль оптической оси, k — волновое число. Если искать радиально-симметричное решение уравнения (1.6) в виде неполного разделения переменных

$$E(r, \theta, z) = E_1 \left(\frac{r}{r_0 [1 + (z/z_0)^2]^{1/2}} \right) E_2(\theta) E_3(z), \quad (1.7)$$

то получатся моды ЛГ [33], которые не изменяют свою интенсивность $|E(r, \theta, z)|^2$ в системе координат

$$\begin{cases} x = r\sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2} \cos \theta, \\ y = r\sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2} \sin \theta, \\ z = z, \end{cases} \quad (1.8)$$

где $z_0 = kr_0^2/2$, r_0 — радиус гауссового пучка при $z = 0$, $k = 2\pi/\lambda$, λ — длина волны излучения.

Менее известно другое решение уравнения (1.6), которое также является решением с неполным разделением переменных и не меняет своей интенсивности в системе координат [34]:

$$\begin{cases} x = rz \cos \theta, \\ y = rz \sin \theta, \\ z = z. \end{cases} \quad (1.9)$$

Линейно-независимыми решениями уравнения (1.6) такого типа являются параксиальные моды Бесселя:

$$\begin{aligned} \Psi_{m\gamma}(r, \theta, z) = \\ = -\sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \frac{(-i)^m k}{z} J_m\left(\frac{k\gamma r}{z}\right) \exp\left[\frac{ik}{2z}(r^2 + \gamma^2) + im\theta\right]. \end{aligned} \quad (1.10)$$

где m — целое число, $\gamma > 0$ — модовый параметр (радиус узкой щели), характеризующий масштаб моды Бесселя. Из уравнения (1.10) видно, что параксиальный пучок Бесселя расходится линейно с увеличением расстояния z :

$$r_{0m} = \frac{\lambda z \alpha_m}{2\pi\gamma}, \quad (1.11)$$

где r_{0m} — радиус первого нулевого кольца моды Бесселя m -го порядка, α_m — первый ненулевой корень функции Бесселя, $J_m(\alpha_m) = 0$.

Линейная расходимость характерна также для мод ЛГ в дальней зоне. Так как радиус основной моды ЛГ зависит от z известным образом:

$$r = r_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2}, \quad (1.12)$$

то при $z \gg z_0$ получим

$$r \approx \frac{\lambda z}{\pi r_0}. \quad (1.13)$$

При z , стремящемся к нулю, функция (1.10) стремится к функции

$$\Psi_{m\gamma}(r, \theta, z \rightarrow 0) = \frac{\delta(r - \gamma)}{\sqrt{2\pi r}} \exp(im\theta). \quad (1.14)$$

Из уравнения (1.14) видно, что световое поле (1.10) может быть сформировано с помощью узкой кольцевой щели радиуса γ в непрозрачном экране, а плотность световой энергии в щели должна быть бесконечно большой.

Из уравнений (1.10) и (1.11) следует, что при z , стремящемся к нулю, вблизи экрана радиус бесселева пучка r_{0m} также стремится к нулю.

Теперь найдем еще одно решение уравнения (1.6) с не полностью разделенными переменными, расходимость которого при больших z будет «слабее», чем расходимость мод ЛГ (1.13) и параксиальных мод Бесселя (1.11). Будем искать решение в виде

$$E(r, \theta, z) = E_n\left(\frac{kr^2}{4z}\right) \exp(in\theta), \quad (1.15)$$

где n — целое число. Для функции $E_n(t)$ где $t = kr^2/(4z)$, вместо уравнения (1.6) получим уравнение

$$\left[t \frac{d^2}{dt^2} + (1 - 2it) \frac{d}{dt} - \frac{n^2}{4t}\right] E_n(t) = 0. \quad (1.16)$$

Будем искать решение уравнения (1.16) в виде

$$E_n(t) = \sqrt{t} e^{it} \Psi_n(t), \quad (1.17)$$

тогда для функции $\Psi_n(t)$ получим уравнение

$$\left[t \frac{d^2}{dt^2} + 2 \frac{d}{dt} + \left(i + t + \frac{1 - n^2}{4t}\right)\right] \Psi_n(t) = 0. \quad (1.18)$$

Пусть частное решение уравнения (1.18) имеет вид

$$\Psi_n(t) = iJ_\nu(t) + J_{\nu+1}(t), \quad (1.19)$$

тогда, подставив выражение (1.19) в уравнение (1.18), получим, что $\nu = (n - 1)/2$, n — целое число. Окончательно находим счетное число линейно-независимых решений уравнения (1.6):

$$\begin{aligned} E_n(r, \theta, z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \exp\left[-i \frac{\pi(n+2)}{4}\right] \sqrt{\frac{kr^2}{4z}} \exp\left[\frac{ikr^2}{4z} + in\theta\right] \times \\ \times \left\{ iJ_{(n-1)/2}\left(\frac{kr^2}{4z}\right) + J_{(n+1)/2}\left(\frac{kr^2}{4z}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

В решении (1.20) постоянный нормировочный множитель

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \exp \left[-i \frac{\pi(n+2)}{4} \right]$$

добавлен из тех соображений, чтобы предел функции $E_n(r, \theta, z)$ при стремлении z к нулю был равен выражению

$$E_n(r, \theta, z) = \exp(in\theta). \quad (1.21)$$

В этом нетрудно убедиться, используя асимптотику функции Бесселя в выражении (1.20) при больших значениях x :

$$J_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right). \quad (1.22)$$

Таким образом, световое поле (1.20) можно сформировать, осветив плоской волной с неограниченной апертурой спиральную фазовую пластинку с функцией пропускания (1.21).

В другом предельном случае, когда z стремится к бесконечности ($t \rightarrow 0$), функция (1.20) будет иметь асимптотику

$$E_n(t \rightarrow 0, \theta) \approx \frac{i\sqrt{\pi} t^{n/2} \exp \left[-\frac{i\pi(n+2)}{4} + in\theta \right]}{2^{n/2} \Gamma \left(\frac{n+1}{2} \right)}. \quad (1.23)$$

При получении выражения (1.23) воспользовались первым членом разложения функции Бесселя в ряд при малом аргументе ($x \rightarrow 0$):

$$J_m(x) \approx \frac{\left(\frac{x}{2} \right)^m}{\Gamma(m+1)}. \quad (1.24)$$

Из уравнения (1.23) видно, что при $t \rightarrow 0$ функция $E_n(t, \theta)$ также стремится к нулю как $t^{n/2}$.

Интенсивность моды (1.20) имеет вид

$$I_n(r, z) = |E_n(r, \theta, z)|^2 = \frac{\pi t}{2} \left[J_{(n-1)/2}^2(t) + J_{(n+1)/2}^2(t) \right]. \quad (1.25)$$

Из уравнения (1.25) видно, что всегда (кроме начальной плоскости $z = 0$) при $t = 0$ $I_n(t) = 0$, т.е. на оптической оси z всегда будет ноль интенсивности. Это является характерным признаком наличия в световом поле оптического вихря или фазовой сингулярности [45].

Из уравнения (1.25) с помощью рекуррентных соотношений для функции Бесселя можно получить выражение для производной:

$$\frac{dI_n(t)}{dt} = \pi n \left[J_{(n-1)/2}^2(t) - J_{(n+1)/2}^2(t) \right]. \quad (1.26)$$

Из уравнения (1.26) видно, что картина интенсивности при любом z имеет кольцевой вид ($n \neq 0$) и радиус первого основного кольца с максимальным значением интенсивности можно найти из уравнения

$$J_{(n-1)/2}(t) = J_{(n+1)/2}(t). \quad (1.27)$$

Пусть в уравнении (1.27) первый (наименьший) корень равен $t = t_{0n}$, тогда радиус первого светлого кольца в картине интенсивности (1.25) будет равен

$$r_{0n} = \sqrt{\frac{2t_{0n}\lambda z}{\pi}}. \quad (1.28)$$

Из сравнения выражения (1.28) с (1.11) и (1.13) можно заключить, что моды (1.20) имеют самую слабую расходимость из известных параксиальных мод (смотри рис. 1.13) при $z > z_1$, где

$$z_1 = \frac{z_0}{2t_{0n}}, \quad (1.29)$$

и при условии, что $\text{tg } \varphi = \lambda\alpha_0/(2\pi\gamma) = \lambda/(\pi r_0)$, где φ — угол наклона к оси z прямой 2 на рис. 1.13.

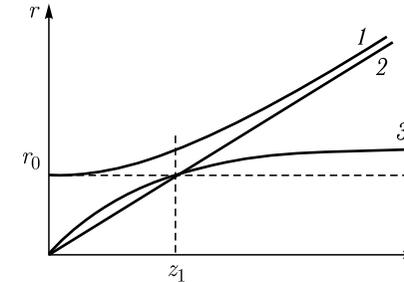


Рис. 1.13. Зависимость эффективного радиуса пучка от расстояния вдоль оптической оси для: гауссового пучка (кривая 1), параксиального бesselевого пучка (кривая 2) и чистого вихря (кривая 3)

Из рис. 1.13 видно, что при малых $z \ll z_0$, наоборот, расходимость светового поля (1.20) наибольшая из трех рассматриваемых полей.

1.2.2. Гипергеометрические моды. Функции (1.20) — частный случай (однопараметрическое семейство) двухпараметрического семейства функций, являющихся решением уравнения (1.6) в цилиндрических координатах. Эти ГГ моды являются полным ортогональным базисом и сохраняют свою структуру в системе координат вида

$$\begin{cases} x = r\sqrt{z} \cos \theta, \\ y = r\sqrt{z} \sin \theta, \\ z = z. \end{cases} \quad (1.30)$$

ГГ моды имеют следующий вид [34]:

$$E_{\gamma n}(r, \theta, z) = \frac{2^{-n+i\gamma-2}}{\pi} \exp\left[\frac{i\pi}{4}(3n-1+i\gamma)\right] \left(\frac{z}{2k}\right)^{(i\gamma-1)/2} \Gamma\left(\frac{n+i\gamma+1}{2}\right) \times \\ \times \left(\frac{kr^2}{2z}\right)^{n/2} \frac{1}{\Gamma(n+1)} {}_1F_1\left(\frac{n+1-i\gamma}{2}, n+1; \frac{ikr^2}{2z}\right) \exp(in\theta), \quad (1.31)$$

где $-\infty < \gamma < \infty$ — действительное число, $\Gamma(x)$ — гамма-функция, ${}_1F_1(a, b; x)$ — вырожденная (или конфлюэнтная) гипергеометрическая функция

$${}_1F_1(a, b; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b)x^k}{\Gamma(a)\Gamma(b+k)k!}. \quad (1.32)$$

Существует связь между функцией (1.32) и функцией Бесселя

$$J_\nu(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\nu e^{-ix}}{\Gamma(\nu+1)} {}_1F_1(\nu+1/2, 2\nu+1, 2ix). \quad (1.33)$$

Физически световые поля с комплексной амплитудой вида (1.31) можно сформировать, освещая неограниченной плоской волной амплитудно-фазовый транспарант с функцией пропускания

$$E_{\gamma n}(r, \theta, z=0) = \frac{r^{i\gamma-1}}{2\pi} \exp(in\theta). \quad (1.34)$$

При $r=0$ в уравнении (1.34) возникает особенность, во избежание которой положим $\gamma=-i$, тогда вместо (1.34) получим функцию пропускания фазового транспаранта, отличающуюся от функции пропускания спиральной фазовой пластинки (1.31) только постоянным множителем

$$E_{-in}(r, \theta) = \frac{\exp(in\theta)}{2\pi}. \quad (1.35)$$

Поэтому функции (1.20) должны совпадать с ГГ модами (1.31) при $\gamma=-i$ (хотя параметр γ в выражении (1.31) должен быть действительным). Покажем, что это действительно так. Положив в выражении (1.31) $\gamma=-i$, получим

$$E_{-in}(r, \theta, z) = \frac{1}{2\pi} \exp\left[\frac{i3\pi n}{4}\right] \left(\frac{kr^2}{2z}\right)^{n/2} \times \\ \times \Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right) \frac{1}{\Gamma(n+1)} {}_1F_1\left(\frac{n}{2}, n+1; \frac{ikr^2}{2z}\right) \exp(in\theta). \quad (1.36)$$

С учетом выражения (1.33) при

$$\nu = (n-1)/2, \quad t = \frac{kr^2}{4z},$$

$$J_{(n-1)/2}(x) = \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^{(n-1)/2} e^{-it}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} {}_1F_1(n/2, n; 2it) \quad (1.37)$$

и рекуррентного соотношения для гипергеометрической функции

$${}_1F_1(n/2, n+1; 2ix) = \left(\frac{id}{dx} + 2\right) {}_1F_1(n/2, n; 2ix), \quad (1.38)$$

получим вместо (1.36) выражение:

$$E_{-in}(t, \theta) = (2\pi)^{-1} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \exp\left[-i\frac{\pi(3n-2)}{4}\right] \sqrt{t} \exp(it+in\theta) \times \\ \times [iJ_{(n-1)/2}(t) + J_{(n+1)/2}(t)]. \quad (1.39)$$

Функция (1.39) отличается от функции (1.20) только нормировочным множителем $(2\pi)^{-1}(-1)^n$.

1.2.3. Свойства чистых вихрей. Гипергеометрические моды или чистые вихри обладают интересными свойствами. Все моды, независимо от величины номера n , распространяются с одинаковыми фазовыми скоростями. Это свойство отличает ГГ моды от мод ЭГ, ЛГ, АГ. Это означает, что любая линейная комбинация мод (1.20) будет сохранять свою структуру с точностью до масштаба ($z > 0$):

$$I(r, \theta, z) = \left| \sum_{n=-N}^N C_n E_n(r, \theta, z) \right|^2 = I\left(r\sqrt{\frac{k}{z}}, \theta\right). \quad (1.40)$$

Подбором значений комплексных коэффициентов C_n в выражении (1.40) можно оптически формировать распределения интенсивности заданного вида, которые при распространении вдоль оптической оси будут сохраняться с точностью до масштаба. Оптически сформировать поле с распределением интенсивности вида (1.40) можно, осветив неограниченной плоской волной амплитудно-фазовый транспарант с функцией пропускания вида:

$$T(r, \theta) = \sum_{n=-N}^N C_n \exp(in\theta). \quad (1.41)$$

Заметим, что световые поля в дальней зоне дифракции, ограниченные при $z=0$ одинаковой апертурой V , имеют одинаковые фазовые

скорости распространения. Действительно, распределение интенсивности в дальней зоне дифракции зависит от отношения $k\xi/z$:

$$I_n(\xi, \eta) = \left| \frac{k}{z} \exp \left[\frac{ik(\xi^2 + \eta^2)}{2z} \right] \iint_V f_n(x, y) \exp \left[\frac{-ik(x\xi + y\eta)}{2z} \right] dx dy \right|^2 = \left(\frac{k}{z} \right)^2 \tilde{I}_n \left(\frac{k\xi}{z}, \frac{k\eta}{z} \right). \quad (1.42)$$

Однако, в отличие от (1.41), эффективный радиус всех световых полей с конечной энергией и ограниченной областью V в дальней зоне, как видно из (1.42), расходится линейно с расстоянием ($r \propto z$), а гипергеометрические моды расходятся пропорционально квадратному корню из расстояния ($r \propto z^{1/2}$).

Линейная комбинация гипергеометрических мод (1.41) обладает орбитальным угловым моментом (ОУМ) [47,48]. Проекция на оптическую ось z вектора углового орбитального момента сохраняется при изменении z , и ее можно вычислить при $z = 0$. В соответствии с выражением для ОУМ [48] для проекции на ось z получим:

$$J_z = \frac{i \iint E(r, \theta) \frac{\partial}{\partial \theta} E^*(r, \theta) r dr d\theta}{\omega \iint |E(r, \theta)|^2 r dr d\theta}, \quad (1.43)$$

где $E(r, \theta)$ — комплексная амплитуда светового поля, удовлетворяющая уравнению (1.6), ω — циклическая частота света. Подставляя выражение (1.41) в уравнение (1.43), получим проекцию вектора ОУМ для суперпозиции гипергеометрических мод:

$$J_z = \frac{\sum_{n=-N}^N n |C_n|^2}{\omega \sum_{n=-N}^N |C_n|^2}. \quad (1.44)$$

Из уравнений (1.43) и (1.44) видно, что хотя гипергеометрические моды обладают бесконечной энергией, нормированный угловой орбитальный момент у них конечен.

Ненормированный ОУМ гипергеометрических мод — бесконечный, но плотность момента в каждой точке пространства — конечна. Измерить ОУМ светового поля можно с помощью специального дифракционного оптического элемента, функция пропускания которого пропорциональна линейной комбинации угловых гармоник (1.41) [49].

1.2.4. Результаты численного моделирования. Моделировать распространение световых полей вида (1.41), представляющих собой

чистые вихри и их суперпозиции, сложно из-за бесконечного радиального размера таких полей.

Однако, если взять радиус поля достаточно большим, то фактическая ограниченность поля не будет существенно сказываться на его центральной части. Кроме того, моделирование распространения ограниченных вихрей [46] позволяет предсказать поведение полей, формируемых с помощью спиральных фазовых пластинок и дифракционных оптических элементов.

Моделирование непараксиального распространения поля (1.41) проводилось на основе разложения входного поля по сферическим волнам:

$$F(u, v, z) = -\frac{z}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int f(x, y) \frac{\exp(ikR)}{R^2} \left(ik - \frac{1}{R} \right) dx dy, \quad (1.45)$$

где

$$R = \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2 + z^2}.$$

При моделировании использовались следующие параметры: размер поля 5×5 мм, число отсчетов в выходном поле 512×512 . На рис. 1.14 показаны результаты моделирования распространения чистых вихрей различных порядков.

На рис. 1.14 видно, что чем больше порядок вихря, тем шире формируемая им воронка, что согласуется с формулой (1.28) для радиуса первого светлого кольца поля. Напомним, что радиус воронки пропорционален первому корню функции Бесселя, значение которого возрастает с ростом индекса n . Кроме того, на рис. 1.14 видно, что растет и яркость первого кольца, а также энергия, которая в нем сосредоточена.

В работе [50] исследовался вопрос использования пучков ЛГ с различными азимутальными индексами для формирования тороидных оптических дипольных ловушек. Было показано, что моды ЛГ с «винтом» более высокого порядка обеспечивают более глубокую потенциальную яму и более компактную концентрацию при фиксированных радиусе тороида и мощности лазера. Аналогичные свойства присущи и чистым оптическим вихрям.

На рис. 1.15 показано распространение линейной комбинации (суперпозиции) чистых вихрей вида $\exp(i\theta) + \exp(-2i\theta)$. В первой строке приведены результаты для исходного амплитудно-фазового поля, а во второй строке — для только фазового, т.е. в плоскости $z = 0$ было поле $\exp\{i \arg[\exp(i\theta) + \exp(-2i\theta)]\}$. Последний случай достаточно легко реализовать с помощью фазовых дифракционных оптических элементов. Видно что, как и было предсказано ранее, распределения интенсивности для суперпозиций чистых вихрей сохраняются при распространении вдоль оптической оси с точностью до масштаба. Интересно, что в случае, когда на входе чисто фазовая суперпозиция чистых

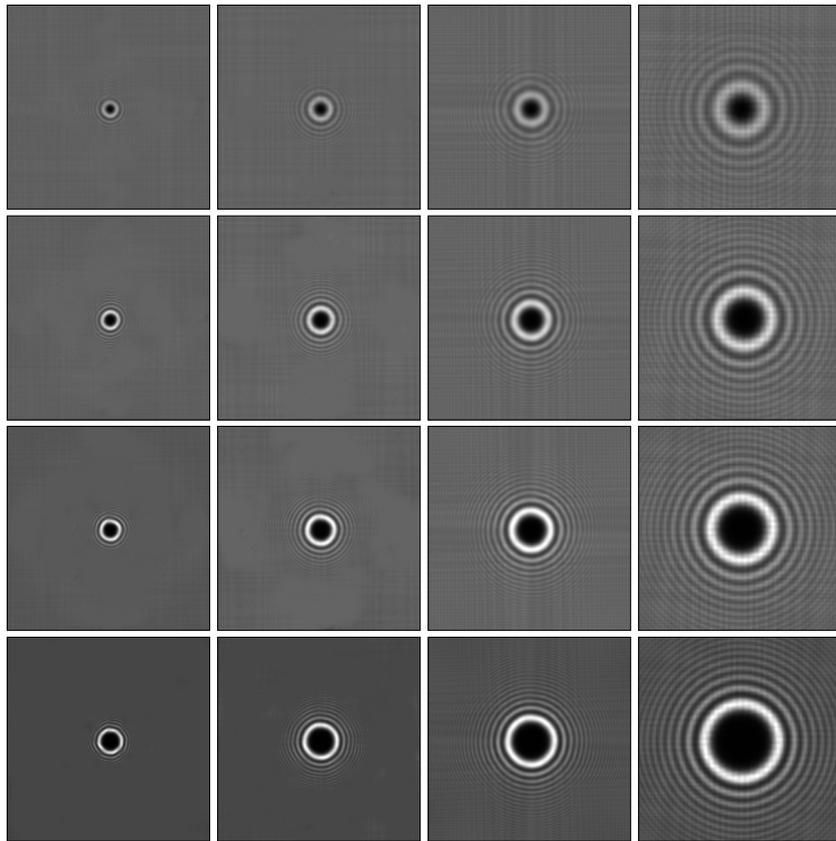


Рис. 1.14. Распределение интенсивности при распространении чистых вихрей порядков $n = 1$ (первый ряд), 2 (второй ряд), 3 (третий ряд), 5 (четвертый ряд) на расстояниях $z = 5$ мм (первый столбец), 10 мм (второй столбец), 20 мм (третий столбец) и 50 мм (четвертый столбец)

вихрей, то картина выглядит как уходящие в бесконечность темные каналы постоянной ширины, вместо расходящихся темных клинов как в случае амплитудно-фазового поля на входе.

В этом разделе рассмотрено новое семейство радиально-симметричных линейно-независимых решений параксиального волнового уравнения, которые названы чистыми вихрями и которые обладают слабой расходимостью и одинаковой фазовой скоростью (1.20). Сформировать чистые вихри можно, освещая плоской волной с неограниченной апертурой спиральную фазовую пластинку (1.21). Показано, что радиус кольца с максимальным значением интенсивности чистого вихря растет как корень квадратный от расстояния вдоль оптической оси (1.28). Показано, что найденные модовые решения являются частным случаем

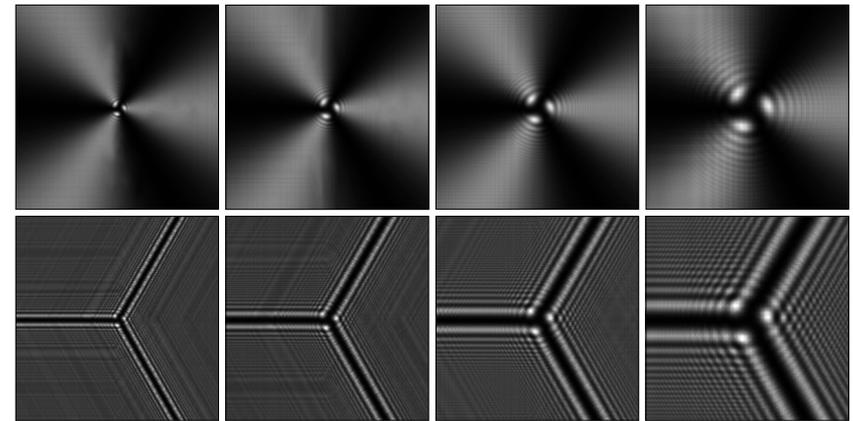


Рис. 1.15. Распространение линейной комбинации чистых вихрей вида $\exp(i\theta) + \exp(-2i\theta)$: распределение интенсивности на расстояниях $z = 5$ мм (первый столбец), 10 мм (второй столбец), 20 мм (третий столбец) и 50 мм (четвертый столбец) для амплитудно-фазового поля на входе (верхняя строка) и только фазового (нижняя строка)

двухпараметрического семейства решений ПВУ, названных гипергеометрическими модами ((1.31) и (1.39)). Результаты численного моделирования подтверждают теоретические выкладки.

1.3. Гипергеометрические моды (эксперимент)

Уравнение Гельмгольца, которое описывает распространение непараксиальной монохроматической световой волны в однородном пространстве, допускает решения с разделяющимися переменными в 11 различных системах координат [34]. Это означает, что существуют световые поля, распространяющиеся без изменения своей структуры. Примером являются хорошо известные моды Бесселя [35]. Параксиальный аналог уравнения Гельмгольца — это параболическое уравнение типа Шредингера, которое описывает распространение параксиальных световых полей. Это уравнение допускает решения с разделяющимися переменными в 17 системах координат [34]. Световые поля, которые описываются такими решениями, при распространении сохраняют свою структуру с точностью до масштаба. Примером являются хорошо известные моды Эрмита–Гаусса и Лагерра–Гаусса [33].

В последнее время резко увеличилось количество работ, в которых решения с разделяющимися переменными для уравнений Гельмгольца и Шредингера используются в оптике [36, 38, 40, 41, 46, 51–54]. Новые непараксиальные световые пучки, которые сохраняют свою структуру при распространении, рассматривались в [51–53]. Это параболические пучки [51], волны Helmholtz–Gauss [52] и Laplace–Gauss [53].

Новые параксиальные световые пучки, сохраняющие свою структуру с точностью до масштаба, рассматривались в [36, 38, 41, 46]. Это моды Ince–Gaussian [36], элегантные пучки Ince–Gaussian [38], моды Hermite–Laguerre–Gaussian [41] и pure light vortices [46]. Некоторые из этих пучков были реализованы с помощью лазерных резонаторов [40, 41], дифракционных оптических элементов [46] и жидко-кристаллических дисплеев [54].

В этом разделе рассмотрено еще одно семейство лазерных мод, представляющих собой ортонормированный базис и являющихся решением с разделенными переменными параксиального параболического уравнения в цилиндрической системе координат. В предыдущем разделе оно было рассмотрено кратко в связи чистыми вихрями. В цилиндрической системе координат уравнение Шредингера кроме решений в виде мод Бесселя и мод Лагерра–Гаусса также имеет решения в виде вырожденных гипергеометрических функций (поэтому эти моды названы авторами гипергеометрическими). Распределения интенсивности в поперечном сечении таких пучков близко к распределению интенсивности для мод Бесселя. Это набор концентрических световых колец, интенсивность которых спадает с ростом радиальной переменной как r^{-2} . Как и моды Бесселя гипергеометрические моды имеют бесконечную энергию. В отличие же от мод Бесселя, радиусы световых колец гипергеометрических мод увеличиваются с ростом продольной координаты z как $z^{1/2}$. Описан также эксперимент по генерации таких лазерных мод с помощью жидкокристаллического микро-дисплея.

1.3.1. Теоретические основы. Комплексная амплитуда параксиального светового поля $E(r, \varphi, z)$ в цилиндрической системе координат (r, φ, z) удовлетворяет уравнению типа Шредингера

$$\left(2ik \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right) E(r, \varphi, z) = 0, \quad (1.46)$$

где $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число света с длиной волны λ . Уравнению (1.46) удовлетворяют функции, образующие ортонормированный базис:

$$E_{\gamma,n}(r, \varphi, z) = \frac{1}{2\pi n!} \left(\frac{z_0}{z}\right)^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{n+1-i\gamma}{2}\right) \times \\ \times \exp\left[\frac{i\pi}{4}(3n+i\gamma-1) + \frac{i\gamma}{2} \ln \frac{z_0}{z} + in\varphi\right] \times \\ \times x^{\frac{n}{2}} {}_1F_1\left(\frac{n+1-i\gamma}{2}, n+1, ix\right), \quad (1.47)$$

где $-\infty < x < \infty$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ непрерывный и дискретный параметры, от которых зависят функции (1.47) и которые будем называть номерами моды, $z_0 = kw^2/2$ — аналог длины Релея, w — параметр

моды, аналогичный радиусу гауссового пучка, хотя здесь он имеет другой смысл, $x = kr^2/(2z)$, $\Gamma(x)$ — гамма функция; ${}_1F_1(a, b, x)$ — вырожденная или конфлюэнтная гипергеометрическая функция [55]:

$${}_1F_1(a, b, x) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)} \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-a-1} \exp(xt) dt, \quad (1.48)$$

где $\text{Re}(b) > \text{Re}(a) > 0$. Из (1.48) видно, что ${}_1F_1(a, b, x)$ — это целая аналитическая функция. В случае (1.47) $\text{Re}(x) = 0$, и тогда уравнение (1.48) является одномерным преобразованием Фурье от ограниченной функции на отрезке $[0, 1]$. По теореме Котельникова–Шеннона асимптотически при $r \rightarrow \infty$ период модуляции функции (1.47) (т. е. расстояние между соседними максимумами или минимумами) равно 2π . При больших значениях аргумента $x \gg 1$ имеет место асимптотика $x^{n/2} |{}_1F_1((n+1-i\gamma)/2, n+1, ix)| \approx 1/x$. Такое поведение модуля функции (1.47) не совпадает с асимптотикой функции Бесселя. Кроме того, нули вырожденной гипергеометрической функции ${}_1F_1(a, b, x_{0,m}) = 0$ близки к нулям функции Бесселя $J_{b-1}(x_{b-1,m}) = 0$ [55]: $x_{0,m} \approx x_{b-1,m}^2/(2b-4a)$.

Реализовать световые пучки (1.47), которые в дальнейшем будем называть гипергеометрическими (ГГ) модами, можно с помощью оптического элемента, имеющего функцию пропускания:

$$E_{\gamma,n}(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{w}{\rho}\right) \exp\left[i\gamma \ln\left(\frac{\rho}{w}\right) + in\theta\right]. \quad (1.49)$$

При освещении оптического элемента (1.49), расположенного в плоскости $z = 0$, неограниченной плоской волной на расстоянии z сформируется световое поле с комплексной амплитудой (1.47). Энергия световых полей (1.47) и (1.49) неограниченна, как и у моды Бесселя $E_{\beta,n}(r, \varphi, z) = J_n(\beta r) \exp[i\beta^2 z/(2k) + in\varphi]$, которая также удовлетворяет уравнению (1.46). Поэтому на практике для реализации моды (1.47) оптический элемент (1.49) следует ограничивать кольцевой диафрагмой. При этом на конечном расстоянии $z_0 < R \tan(\gamma/R)$, где R — больший радиус кольцевой диафрагмы, будет эффективно формироваться мода (1.47).

Световое поле (1.47) при распространении сохраняет свою структуру и меняется только масштабно. Поперечное распределение интенсивности ГГ моды (1.47) представляет собой набор концентрических световых колец, радиусы которых удовлетворяют условию:

$$\rho_m = \sqrt{\frac{\alpha_m z \lambda}{\pi}}, \quad (1.50)$$

где α_m — постоянные, зависящие от номера кольца m и от номеров моды (γ, n) . Из (1.50) следует, что радиусы колец увеличиваются

с ростом z как $z^{1/2}$. Из соотношения [55]:

$${}_1F_1\left(\frac{n+1+i\gamma}{2}, n+1, -ix\right) = \exp(-ix) {}_1F_1\left(\frac{n+1-i\gamma}{2}, n+1, ix\right)$$

следует, что фаза гипергеометрической функции равна $x/2$: $\arg\{{}_1F_1((n+1+i\gamma)/2, n+1, -ix)\} = x/2$. Интересно, что эта фаза не зависит от номеров моды (γ, n) . Тогда можно записать выражение для фазы ГГ-моды:

$$\arg\{E_{\gamma,n}(r, \varphi, z)\} = \frac{\gamma}{2} \ln \frac{z}{z_0} + n\varphi + \frac{kr^2}{4z} + \frac{\pi}{4}(3n-1), \quad (1.51)$$

где первое слагаемое имеет смысл фазы Гоу (Gouy).

1.3.2. Численное моделирование. Формула (1.47) позволяет рассчитывать идеальные (бесконечные) ГГ-моды. Однако, при генерации этих мод используется оптический элемент конечного размера, поэтому при моделировании формирования ГГ-моды использовалось преобразование Френеля

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{\gamma,n}(r, \varphi, z) = & \frac{k}{2\pi iz} \exp\left(i\frac{k}{2z}r^2\right) \int_0^\infty \int_0^{2\pi} E_{\gamma,n}(\rho, \theta) \times \\ & \times \exp\left(i\frac{k}{2z}\rho^2\right) \exp\left[-i\frac{k}{z}r\rho\cos(\theta-\varphi)\right] \rho d\rho d\theta \quad (1.52) \end{aligned}$$

от входной функции $E_{\gamma,n}(\rho, \theta)$ (1.49).

На рис. 1.16–1.18 показаны распределения интенсивности и фазы различных ГГ-мод и их суперпозиций, рассчитанные по формулам (1.47) и (1.52) на расстояниях $z = 1000$ мм и $z = 2000$ мм. Параметры расчета: длина волны $\lambda = 633$ нм, размер изображений — 4×4 мм, число отсчетов — 256×256 .

Среднеквадратичное отклонение распределения интенсивностей для идеальных пучков (формула (1.47)) и полученных через преобразование Френеля (формула (1.52)) составило 15–23 %.

На рис. 1.19 показаны радиальные сечения интенсивности ГГ-моды $(\gamma, n) = (2, 3)$ на расстояниях $z = 100$ мм и $z = 200$ мм. Видно, что радиусы световых колец увеличиваются с ростом z . На рис. 1.20 приведен график расходимости интенсивности этой моды в зависимости от пройденного расстояния z . Среднеквадратичное отклонение численных результатов от аппроксимирующей функции $y = 0,0405z^{1/2}$ составило 14 %.

На рис. 1.21 приведены радиальные сечения интенсивности ГГ-мод с одинаковым параметром $\gamma = 2$ и различными индексами n на одном и том же расстоянии. Видно, что с ростом индекса n радиус первого светового кольца увеличивается. Это связано с возрастанием номера винтовой сингулярности, которую содержат ГГ-моды.

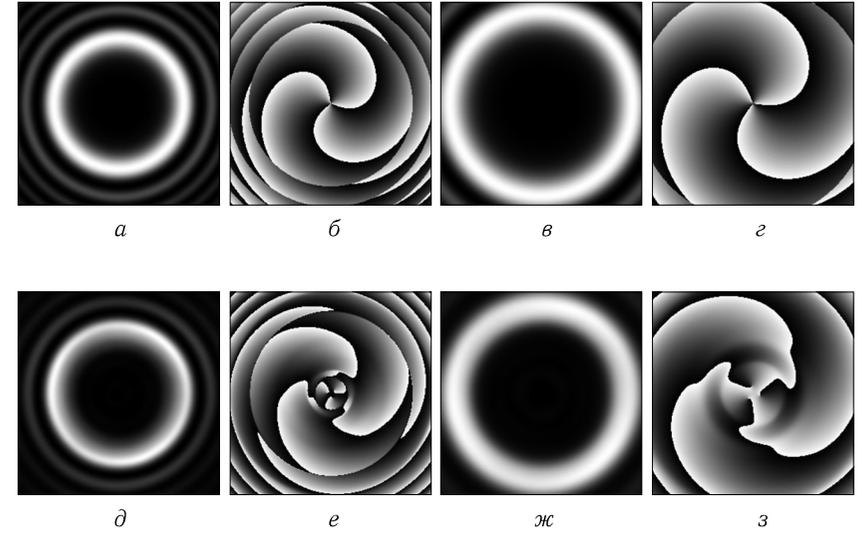


Рис. 1.16. Распределения интенсивности (а, в, д, ж) и фазы (б, г, е, з) ГГ-моды $(\gamma, n) = (2, 3)$, рассчитанное по формуле (1.47) (а–г) и по формуле (1.52) (д–з) на расстояниях $z = 1000$ мм (а, б, д, е) и $z = 2000$ мм (в, г, ж, з)

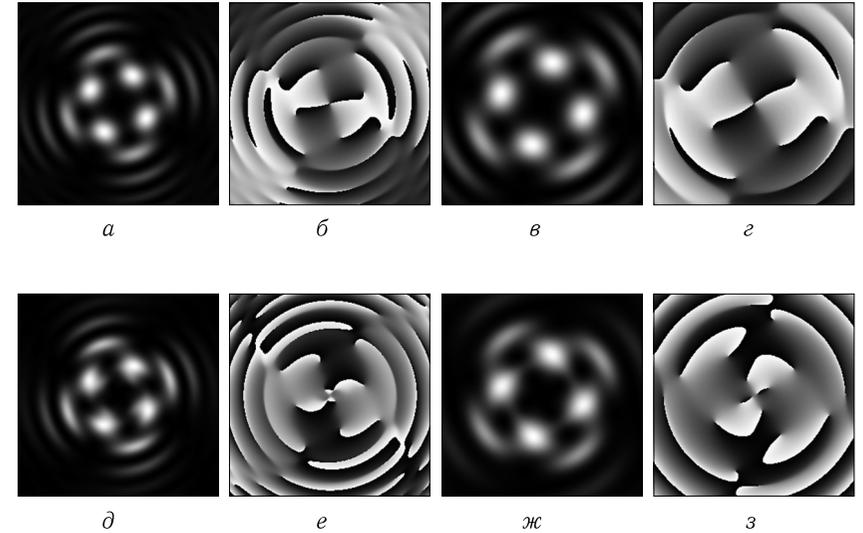


Рис. 1.17. Распределения интенсивности (а, в, д, ж) и фазы (б, г, е, з) суперпозиции из двух ГГ-мод $(\gamma, n) = (0, 2) + (-3, -2)$, рассчитанные по формуле (1.47) (а–г) и по формуле (1.52) (д–з) на расстояниях $z = 1000$ мм (а, б, д, е) и $z = 2000$ мм (в, г, ж, з)

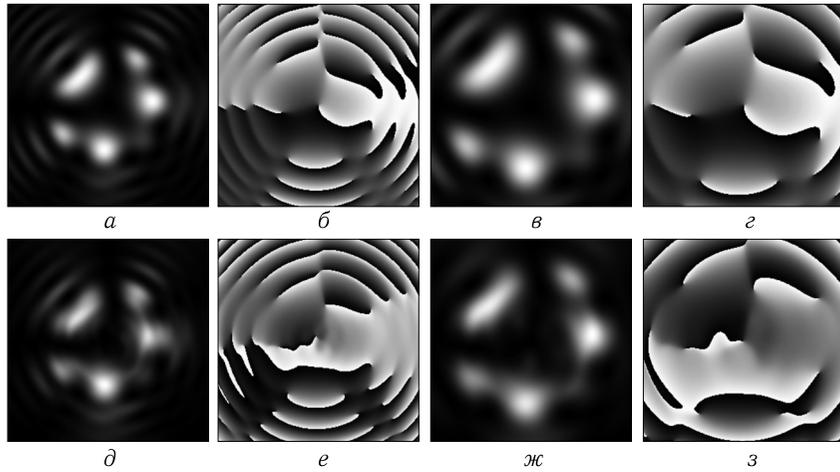


Рис. 1.18. Распределения интенсивности (а, в, д, ж) и фазы (б, г, е, з) суперпозиции из четырех ГГ-мод $(\gamma, n) = (0, 1) + (0, -2) + (0, 3) + (0, -4)$, рассчитанные по формуле (1.47) (а-г) и по формуле (1.52) (д-з) на расстояниях $z = 1000$ мм (а, б, д, е) и $z = 2000$ мм (в, г, ж, з)

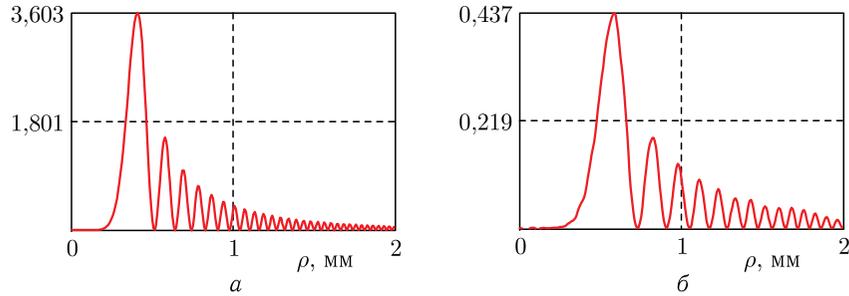


Рис. 1.19. Радиальные сечения интенсивности ГГ-моды $(\gamma, n) = (2, 3)$, рассчитанные по формуле (1.52) на расстояниях $z = 100$ мм (а) и $z = 200$ мм (б)

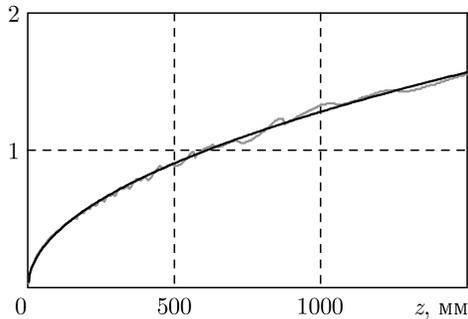


Рис. 1.20. График расходимости интенсивности ГГ-моды $(\gamma, n) = (2, 3)$ в зависимости от пройденного расстояния z : черной линией отображен результат численных расчетов по формуле (1.52), серой — аппроксимация функцией $y = 0,0405z^{1/2}$

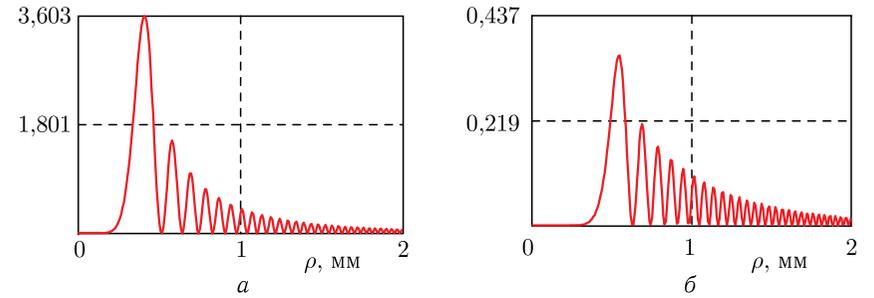


Рис. 1.21. Радиальные сечения интенсивности ГГ-мод с одинаковым параметром $\gamma = 2$ и различными индексами n на расстоянии $z = 100$ мм: $n = 3$ (а) и $n = 9$ (б)

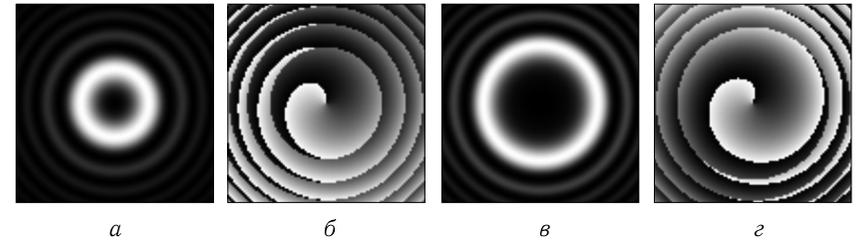


Рис. 1.22. Распределения интенсивности и фазы ГГ-мод с одинаковым индексом $n = 1$ и различными параметрами γ на расстоянии $z = 1000$ мм: $\gamma = 0$ (а, б) и $\gamma = 2$ (в, г)

На рис. 1.22 показаны распределения интенсивности и фазы ГГ-мод с одинаковым индексом $n = 1$ и различными параметрами γ на одном и том же расстоянии. Видно, что с ростом параметрами γ радиус первого светового кольца также увеличивается. При этом фазовая практически сохраняет свой вид, так как фазовая функция ГГ-мод (1.51) главным образом определяется номером винтовой сингулярности n .

1.3.3. Эксперимент. Экспериментально ГГ-моды формировались с помощью жидко-кристаллического микро-дисплея CRL OPTO с разрешением 1316×1024 элементов. На микродисплее формировался бинарный дифракционный оптический элемент (ДОЭ) диаметром 6,5 мм, который освещался линейно-поляризованным плоским пучком. Эксперимент проводился на установке оптическая схема которой представлена на рис. 1.23.

Луч лазера расширяется коллиматором и попадает на динамический модулятор света под углом близким к 90° и отражается в направлении телекамеры. ДОЭ формировался на динамическом модуляторе CRL OPTO с разрешением 1316×1024 , размер ДОЭ был 6,5 мм, ДОЭ

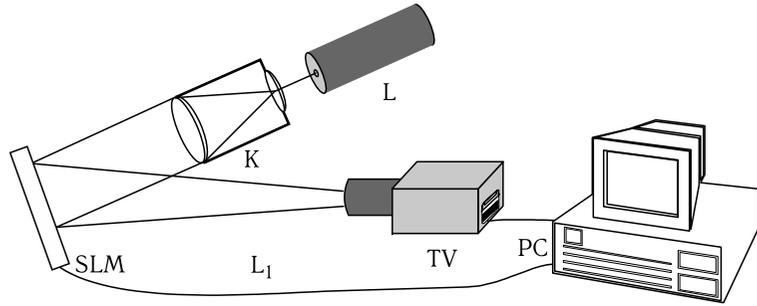


Рис. 1.23. Оптическая схема для эксперимента. L — твердотельный лазер с длиной волны 532 нм и мощностью 500 мВт, K — коллиматор, SLM — динамический модулятор света, TV — телекамера, PC — персональный компьютер

освещался плоским пучком от твердотельного лазера с длиной волны 532 нм и мощностью 500 мВт. При этом представленная фаза ДОЭ соответствует ДОЭ формирующему гипергеометрическую моду и закодированному двумя способами.

Бинарная фаза ДОЭ при линейном кодировании $S(r, \varphi)$, удовлетворяет уравнению

$$S(r, \varphi, z) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \left\{ \cos \left[\gamma \ln \frac{r}{w} + n\varphi + \alpha x \right] \right\}, \quad (1.53)$$

где $\operatorname{sgn}(x)$ — знаковая функция, α — пространственная несущая частота, x — декартова координата. Амплитуда r^{-1} функции (1.49) заменялась на постоянное значение.

Закодированный элемент формирует в плоскости дифракции Фраунгофера два симметричных порядка с гипергеометрическими модами.

При квадратичном радиальном кодировании бинарная фаза ДОЭ рассчитывается по формуле

$$S(r, \varphi, z) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \left\{ \cos \left[\gamma \ln \frac{r}{w} + n\varphi + \frac{kr^2}{2f} \right] \right\}, \quad (1.54)$$

где f — фокусное расстояние сферической линзы.

Это значит, что гипергеометрические моды будут формироваться на расстоянии, немного меньшим фокусного расстояния бинарной линзы.

На рис. 1.24 представлены фазы линейно кодированных ДОЭ и распределение интенсивности на расстоянии 2000 мм от пространственно-го модулятора для различных n и γ .

Так как при линейном кодировании энергия делится между двумя порядками, а дифракционная эффективность ДОЭ сформированного на модуляторе невысока, полученные изображения обладают недостаточным контрастом. Для избавления от этого недостатка было использовано квадратичное кодирование (1.54). На рис. 1.25 представлены виды

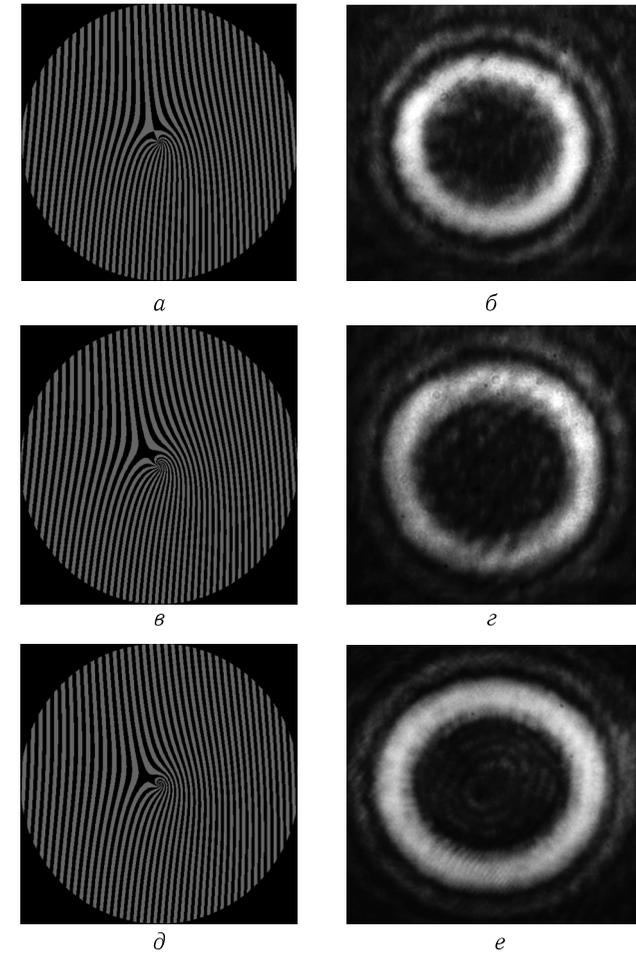


Рис. 1.24. Фаза, сформированная на динамическом пространственном модуляторе света (а) и распределение интенсивности на расстоянии 2000 мм от модулятора (б) для $n = 10$, $\gamma = 5$, фаза сформированная на динамическом пространственном модуляторе света (в) и распределение интенсивности на расстоянии 2000 мм от модулятора (г) для $n = 10$, $\gamma = 10$, фаза сформированная на динамическом пространственном модуляторе света (д) и распределение интенсивности на расстоянии 2000 мм от модулятора (е) для $n = 5$, $\gamma = 10$

фаз таких элементов (центральные части) формирующих гипергеометрические моды и распределения интенсивностей на расстоянии 700 мм от ДОЭ.

На рис. 1.26 представлено распределение интенсивности на разных расстояниях от ДОЭ.

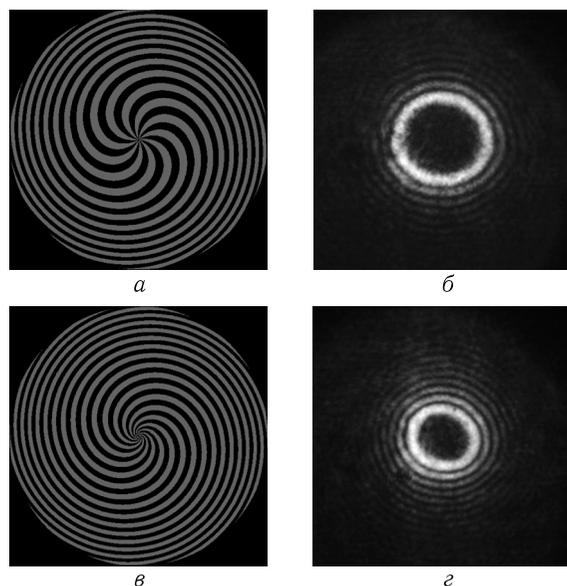


Рис. 1.25. а) фаза ДОЭ для гипергеометрической моды с параметрами $n = 10$, $\gamma = 1$, б) распределение интенсивности в зоне дифракции Френеля, в) фаза ДОЭ для гипергеометрической моды с параметрами $n = 10$, $\gamma = 10$, г) распределение интенсивности в зоне дифракции Френеля

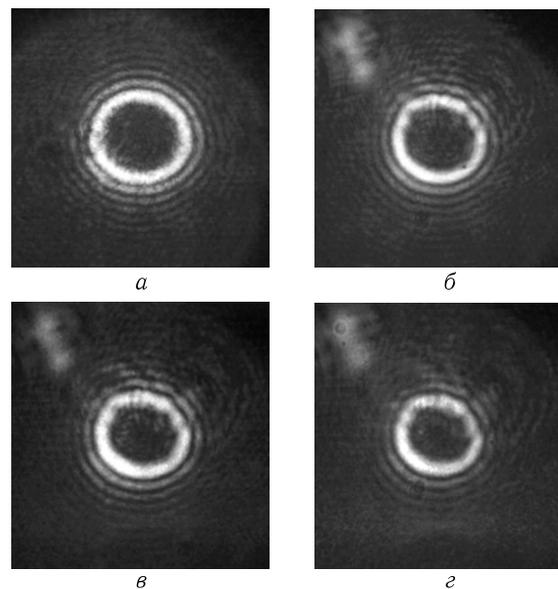


Рис. 1.26. Распространение пучка $n = 10$, $\gamma = 1$ а) $z = 700$ мм, б) $z = 725$ мм, в) $z = 750$ мм, г) $z = 775$ мм

Уменьшение размера гипергеометрической моды связано с тем, что фиксируемое изображение снималось в сходящемся пучке. Как видно из рис. 1.26, структура распределения сохраняется, что доказывает модовый характер светового пучка.

В этом разделе рассмотрено теоретически и экспериментально новое семейство оптических вихрей, названных гипергеометрическими модами. ГГ-моды удовлетворяют парааксиальному уравнению типа Шредингера, образуют ортогональный базис функций, при распространении сохраняют свою структуру с точностью до масштаба и близки к известным модам Бесселя. Заметим, что при $\gamma = -i$ ГГ-моды переходят в однопараметрическое семейство чистых оптических вихрей [46].

Глава 2

МНОГОМОДОВЫЕ ВРАЩАЮЩИЕСЯ ПУЧКИ

2.1. Пучки с продольной периодичностью

В работах [56, 57] изучался световой пучок, описываемый функцией Бесселя первого рода нулевого порядка, а в [58] — световой пучок, амплитуда которого пропорциональна произведению функции Бесселя на функцию Гаусса. Показано, что такие световые пучки распространяются в свободном пространстве без дифракции. В [59, 60] рассмотрены бездифракционные пучки высших порядков, описываемые функциями Бесселя произвольного порядка. Их называют бесселевыми модами [61]. Они распространяются, например, внутри сердцевины круглого оптического волокна, а также появляются на выходе резонатора с круглыми плоскими зеркалами одинакового радиуса.

В работе [62] получено общее выражение для комплексной амплитуды бездифракционных пучков, которые при распространении не изменяются. Был также разработан итеративный алгоритм [17], с помощью которого можно рассчитывать фазовые дифракционные оптические элементы (ДОЭ), формирующие световые пучки с произвольной композицией бесселевых мод.

С бездифракционными пучками, которые сохраняют свой вид при распространении, тесно связаны саморепродуцирующиеся световые пучки, которые повторяют свой вид через равные промежутки вдоль оси распространения. Известный эффект Тальбота саморепродукции световых полей с поперечной пространственной периодичностью является частным случаем генерации световых пучков с продольной периодичностью. Саморепродукция периодических двумерных структур в когерентном свете рассматривалась в ряде работ, например, [63–72]. Эффект Тальбота изучался как теоретически [63–68], так и в прикладном аспекте: в интерферометрии [69–71] и обработке информации [72]. Сообщалось также о возможности саморепродукции пространственного Фурье-спектра объектов [73, 74]. Общее выражение для комплексной амплитуды световых полей, обладающих продольной периодичностью по модулю, изучено в [62].

Вопросы, связанные с решением задач синтеза фазовых оптических элементов, генерирующих световые поля с заданным продольным, в частности, продольно-периодическим, распределением интенсивности рассматривались в [75–77]. Однако разработанные в этих работах алгоритмы позволяют рассчитывать фазовые ДОЭ, формирующие заданное продольное распределение интенсивности на малом участке оптической оси.

В данном разделе рассматривается итеративный алгоритм расчета ДОЭ, формирующих световые поля с продольной периодичностью и обладающие модовым характером. Такие световые поля сохраняют периодичность, в принципе, вдоль всей оптической оси.

2.1.1. Теоретические основания. Пусть комплексная амплитуда монохроматического светового поля $U(x, y, z)$, удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$(\nabla^2 + k^2)U(x, y, z) = 0, \quad (2.1)$$

где ∇^2 — дифференциальный оператор Лапласа, k — волновое число света. Если комплексная амплитуда приводима в цилиндрических координатах:

$$U(x, y, z) = U_1(r)U_2(\varphi)U_3(z),$$

то частное решение уравнения (2.1) можно записать в виде [76]:

$$U_{qm}(r, \varphi, z) = e^{qz} J_m \left(r \sqrt{k^2 + q^2} \right) e^{im\varphi}, \quad (2.2)$$

где (r, φ) — поперечные полярные координаты светового поля, q — постоянная разделения, $J_m(x)$ — функция Бесселя m -го порядка. Постоянную разделения q можно найти из требования периодичности поля вдоль оси z :

$$U(r, \varphi, z + z_0) = U(r, \varphi, z), \quad (2.3)$$

где z_0 — период. Из условия (2.3) следует возможность представления светового поля функциональным рядом Фурье:

$$U(r, \varphi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_n(r, \varphi) \exp \left(\frac{2\pi i n z}{z_0} \right), \quad (2.4)$$

где

$$U_n(r, \varphi) = \frac{1}{z_0} \int_0^{z_0} U(r, \varphi, z) \exp \left(-\frac{2\pi i n z}{z_0} \right) dz. \quad (2.5)$$

Сравнивая выражения (2.2) и (2.4), получим явный вид функции $U_n(r, \varphi)$:

$$U_n(r, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m J_m \left(r \sqrt{k^2 + q_n^2} \right) e^{im\varphi}, \quad (2.6)$$

где $q_n = 2\pi i n / z_0$.

Таким образом, общий вид светового поля, обладающего продольной периодичностью в соответствии с условием (2.3), должен быть следующим:

$$U(r, \varphi, z) = \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} C_m J_m(kr\bar{\rho}_n) \exp\left\{\frac{2\pi inz}{z_0} + im\varphi\right\}, \quad (2.7)$$

где $\bar{\rho}_n = \sqrt{1 - (n\lambda/z_0)^2}$, $\lambda = 2\pi/k$ — длина волны. Требование положительности подкоренного выражения для $\bar{\rho}_n$ ограничивает число слагаемых в сумме (2.7) по индексу n :

$$|n| \leq z_0/\lambda. \quad (2.8)$$

Слагаемые в уравнении (2.7) при $|n| > z_0/\lambda$ будут пропорциональны модифицированным функциям Бесселя $I_m(kr\bar{\rho}_n)$, которые расходятся при стремлении r к бесконечности. Эти нефизические слагаемые мы исключаем из рассмотрения.

В [62] из условия продольной периодичности светового поля по модулю

$$|U(r, \varphi, z + z_0)| = |U(r, \varphi, z)| \quad (2.9)$$

получено отличное от (2.7) выражение вида:

$$U(r, \varphi, z) = \sum_{n=n_1}^{n_2} U_n(r, \varphi) \exp\left\{2\pi iz \left(\frac{\sigma_0}{\lambda} + \frac{n}{z_0}\right)\right\}, \quad (2.10)$$

где

$$U_n(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_n(\theta) \exp[-ikr\rho_n \cos(\varphi - \theta)] d\theta, \quad (2.11)$$

$$\rho_n = \sqrt{1 - (\sigma_0 + n\lambda/z_0)^2}, \quad (2.12)$$

$\sigma_0 = \cos\psi_0$, ψ_0 — минимальный угол наклона плоских волн пространственного спектра для данного поля, n_1 и n_2 — находятся из условия положительности подкоренного выражения в уравнении (2.12):

$$n_1 = -\left[\sigma_0 \frac{z_0}{\lambda}\right], \quad n_2 = -\left[(1 - \sigma_0) \frac{z_0}{\lambda}\right], \quad (2.13)$$

где [...] — знак целой части числа.

В уравнении (2.11) произвольная функция $F_n(\theta)$ описывает угловую зависимость спектра плоских волн саморепродуцирующегося пучка. Подставив в (2.11) выражение для разложения этой периодической функции в ряд Фурье:

$$F_n(\theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_{mn} \exp(im\theta), \quad (2.14)$$

и используя интегральное представление для функции Бесселя, получим:

$$U(r, \varphi, z) = \exp(ik\sigma_0 z) \sum_{n=n_1}^{n_2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_{mn} J_m(kr\rho_n) \exp\left\{\frac{2\pi inz}{z_0} + im\varphi\right\}. \quad (2.15)$$

Из сравнения уравнений (2.7) и (2.15) видно, что при $\sigma_0 = 0$ они функционально тождественны. Световые поля, описываемые уравнением (2.15), являются более широким семейством полей, чем те, которые описываются уравнением (2.7), так как условие (2.9) более слабое, чем условие (2.3).

Из уравнения (2.15) также видно, что в световое поле с продольной периодичностью $U(r, \varphi, z)$ вносят отличный от нуля вклад плоские волны, волновые векторы которых лежат на конических поверхностях, с образующими, наклоненными к оси z под углами:

$$\cos\psi_n = \cos\psi_0 + n\lambda/z_0, \quad n \in [n_1, n_2]. \quad (2.16)$$

Далее на основе уравнения (2.15) рассматриваются алгоритмы расчета фазовых ДОЭ.

2.1.2. Алгоритмы расчета ДОЭ. Рассмотрим полную систему ортогональных функций в круге радиуса R [61]:

$$\Omega_{mn}(r, \varphi) = A_{mn} J_m\left(\frac{r}{R} \gamma_{mn}\right) \exp(im\varphi), \quad (2.17)$$

где

$$A_{mn} = \left\{\sqrt{\pi} R J'_m(\gamma_{mn})\right\}^{-1}, \quad (2.18)$$

$J'_m(x)$ — производная функции Бесселя, $\gamma_{m,n}$ — корни функции Бесселя: $J_m(\gamma_{mn}) = 0$, $\gamma_{-m,n} = \gamma_{m,-n} = \gamma_{-m,-n} = \gamma_{m,n}$.

Условие ортогональности функций (2.17) имеет вид

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} \Omega_{mn}(r, \varphi) \cdot \Omega_{pq}^*(r, \varphi) \cdot r dr d\varphi = \delta_{mp} \delta_{nq}. \quad (2.19)$$

Любую непрерывную и ограниченную в круге функцию $U(r, \varphi)$ можно разложить по базису (2.17):

$$U(r, \varphi) = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} C_{mn} \Omega_{mn}(r, \varphi). \quad (2.20)$$

Для того, чтобы сгенерировать световое поле $U(r, \varphi, z)$ из уравнения (2.15), следует при $z = 0$ сформировать световое поле

с комплексной амплитудой вида

$$U_0(r, \varphi) = \sum_{n=n_1}^{n_2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{C}_{mn} J_m(kr\rho_n) \exp(im\varphi). \quad (2.21)$$

Сравнивая уравнения (2.20) и (2.21), находим, что в ряде (2.21) только те коэффициенты C_{mn} отличны от нуля, для которых выполняется условие:

$$Rk\rho_n = \gamma_{mn}. \quad (2.22)$$

Заметим, что корни функции Бесселя перемежаются согласно неравенствам: $0 < \gamma_{m,1} < \gamma_{m+1,1} < \gamma_{m,2} < \gamma_{m+1,2} < \gamma_{m,3} \dots$

Разложение (2.20) с условием (2.22) позволяют провести итеративную процедуру расчета фазового ДОЭ, генерирующего световое поле с продольной периодичностью. Выбор величины периода z_0 и параметров σ_0 , λ , R определяют значения величин ρ_n , n_1 , n_2 с помощью уравнений (2.12) и (2.13). Далее, введя обозначение для p -й оценки искомой фазы комплексной функции пропускания ДОЭ

$$S_p(r, \varphi) = \arg U_0^{(p)}(r, \varphi), \quad p = 0, 1, 2, \dots,$$

получим итеративный алгоритм ее расчета:

$$S_{p+1}(r, \varphi) = \arg \left\{ \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} B_{mn} \exp \left[i \arg C_{mn}^{(p)} \right] \Omega_{mn}(r, \varphi) \right\}, \quad (2.23)$$

$$C_{mn}^{(p)} = \int_0^R \int_0^{2\pi} \exp [iS_p(r, \varphi)] \cdot \Omega_{mn}^*(r, \varphi) \cdot r dr d\varphi, \quad (2.24)$$

$$B_{mn} \neq 0 \text{ при } Rk\rho_n = \gamma_{mn}, \quad (2.25)$$

где B_{mn} — неотрицательные числа, которые задаются произвольно и определяют вид поперечного распределения интенсивности светового поля. Алгоритм (2.23)–(2.25) сходится в среднем, т. е. можно показать, что для любого p имеет место неравенство:

$$\sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \left[\left| C_{mn}^{(p+1)} \right| - B_{mn} \right]^2 \leq \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \left[\left| C_{mn}^{(p)} \right| - B_{mn} \right]^2. \quad (2.26)$$

Заметим, однако, что алгоритм (2.23)–(2.25) не позволяет рассчитывать фазовые ДОЭ, формирующие продольно-периодические световые поля с заданным поперечным распределением интенсивности. Вид поперечного распределения интенсивности является не входной, а выходной функцией для данного алгоритма.

Рассмотрим алгоритм для расчета ДОЭ, формирующих радиальные световые поля с продольной периодичностью и с заданным поперечным

распределением интенсивности вдоль оси. Алгоритм основан на разложении поля в ряд по ортогональным базисным функциям

$$Q_{mn}(r, z) = D_{mn} J_m \left(\frac{r}{R} \gamma_{mn} \right) \exp \left[i2\pi \left(\frac{n}{z_0} + \frac{\sigma}{\lambda} \right) z \right], \quad (2.27)$$

где

$$D_{mn} = \{ \sqrt{z_0} R J'_m(\gamma_{mn}) \}^{-1}, \quad (2.28)$$

$$U(r, z) = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \bar{C}_{mn} Q_{mn}(r, z).$$

Вместо уравнений (2.23), (2.24) (уравнение (2.25) сохраняется) запишем аналогичные уравнения для итеративного поиска фазы светового поля $L_p(r, z) = \arg U^{(p)}(r, z)$:

$$L_{p+1}(r, z) = \arg \left\{ \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} B_{mn} \exp \left[i \arg \bar{C}_{mn}^{(p)} \right] Q_{mn}(r, z) \right\}, \quad (2.29)$$

$$\bar{C}_{mn}^{(p)} = \int_0^R \int_0^{z_0} \sqrt{I_0(r, z)} \exp [iL_p(r, z)] \cdot Q_{mn}^*(r, \varphi) \cdot r dr dz, \quad (2.30)$$

где $I_0(r, z)$ — заданное периодическое (с периодом z_0) радиальное распределение интенсивности вдоль оси z , причем при $z = 0$, функция $I_0(r)$ описывает интенсивность освещающего пучка, B_{mn} — произвольные неотрицательные числа, от которых зависит вид фазы и скорость сходимости алгоритма. Фаза радиального ДОЭ, полученная за p шагов алгоритма (2.25), (2.29), (2.30) описывается функцией $L_p(r, z = 0)$.

2.1.3. Результаты моделирования. Расчет ДОЭ, формирующих продольно-периодические поля, производился с помощью алгоритма (2.23)–(2.25). Параметры расчета выбирались следующие: $R = 6$ мм, $\lambda = 1,06$ мм, $z_0 = 20$ мм, $\rho_0 = 0,02$ мм. При этих параметрах модовый характер светового поля, прошедшего ДОЭ, сохраняется приблизительно на расстоянии

$$z_1 = R\rho^{-1},$$

где ρ — минимальное значение параметра ρ_n в уравнении (2.12), которое тем меньше, чем больше отличных от нуля слагаемых в сумме (2.20).

На рис. 2.1 показаны распределения нормированной интенсивности на оптической оси для ДОЭ, который получен при выборе отличным от нуля одного первого коэффициента суммы (2.20). Это единственное слагаемое пропорционально функции Бесселя нулевого порядка $J_0(kr\rho_0)$. Распространение такого поля вдоль оси z рассчитывалось с помощью преобразования Френеля, которое в свою очередь, вычислялось с помощью алгоритма быстрого преобразования Фурье.

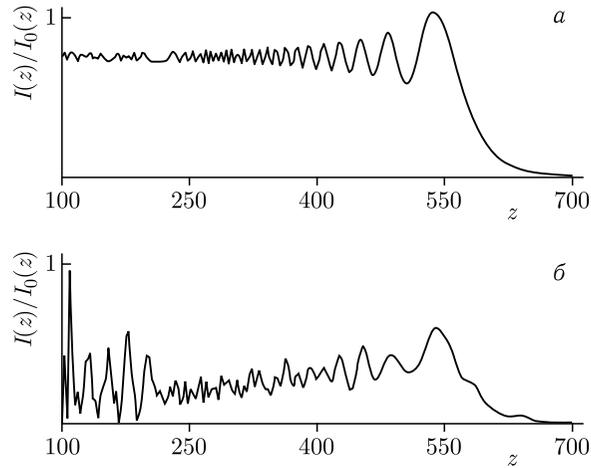


Рис. 2.1. Нормированные распределения интенсивности вдоль оси для амплитудно-фазового (а) и фазового (б) ДОЭ, рассчитанных итеративным алгоритмом с одним слагаемым суммы (2.20)

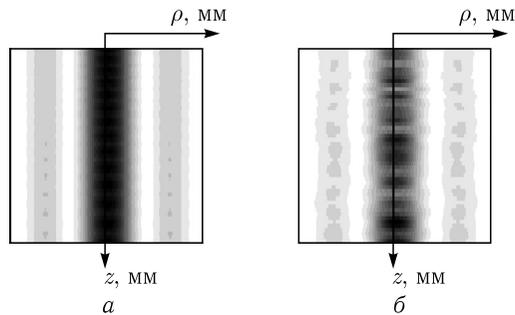


Рис. 2.2. Полутоновые нормированные распределения интенсивности в координатах (ρ, z) для амплитудно-фазового (а) и фазового (б) ДОЭ, рассчитанных итеративным алгоритмом с одним слагаемым суммы (2.20)

На рис. 2.1, а показана кривая интенсивности вдоль оси в пределах от 100 мм до 700 мм, а на рис. 2.2, а показано в полутонах поперечное распределение интенсивности в координатах (ρ, z) в пределах по оси z от 200 мм до 300 мм. Черный цвет соответствует максимальному значению интенсивности. Из рисунков видно, что полутоновые нормированные распределения интенсивности в координатах (ρ, z) для амплитудно-фазового (а) и фазового (б) ДОЭ, рассчитанного итеративным алгоритмом с двумя первыми слагаемыми суммы (2.20), и полутоновая фаза этого ДОЭ (в), что бесселевый пучок сохраняется по форме, испытывая только осцилляции интенсивности с постоянной амплитудой на оптической оси до расстояния, на котором сохраняется

модовый характер светового поля при $\rho = \rho_0, z = 300$ мм. Далее по мере распространения пучка из-за конечности апертуры ДОЭ амплитуда осцилляций нарастает и при $z > 550$ мм осевая интенсивность пучка монотонно спадает, что означает начало дифракционной расходимости пучка. Радиус бесселева пучка был равен около 0,02 мм.

На рис. 2.1, б и 2.2, б показаны аналогичные кривые распределения интенсивности для оптического элемента, полученного из предыдущего ДОЭ с заменой амплитуды на единичную и без изменения фазы. Фактически такой ДОЭ представляет собой фазовый бинарный аксикон. Из рис. 2.1, б и 2.2, б видно, что хотя амплитуда осцилляции интенсивности вдоль оси увеличивается, модовый характер пучка, то есть рас-

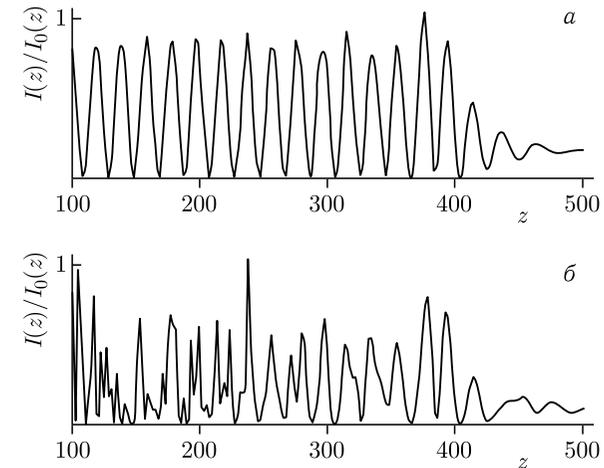


Рис. 2.3. Нормированные распределения интенсивности вдоль оси для амплитудно-фазового (а) и фазового (б) ДОЭ, рассчитанного итеративным алгоритмом с двумя первыми слагаемыми суммы (2.20)

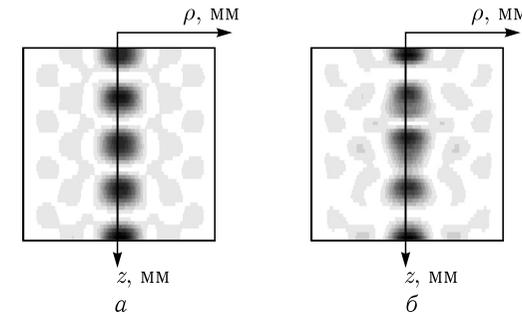


Рис. 2.4. Полутоновые нормированные распределения интенсивности в координатах (ρ, z) для амплитудно-фазового (а) и фазового (б) ДОЭ, рассчитанного итеративным алгоритмом с двумя первыми слагаемыми суммы (2.20)

пространство без изменения вида, сохраняется. Понятно, что выбором только одного слагаемого в сумме (2.20) получить продольно периодическое поле нельзя. Для этого требуется хотя бы два слагаемых, отличных от нуля. На рис. 2.3 показаны осевые распределения нормированной интенсивности для амплитудно-фазового (а) и только фазового (б) ДОЭ, рассчитанного по методу (2.23)–(2.25), если отличны от нуля коэффициенты с номерами $m = 0, n = 0, 1$. Видно, что световое поле обладает продольной периодичностью с периодом $z_0 = 20$ мм на расстоянии около 400 мм ($R = 6$ мм, $\lambda = 1,06$ мкм). Из рис. 2.3, б видно, что фазовый ДОЭ также имеет чередование вдоль оптической оси максимумов и минимумов интенсивности через каждые 20 мм, хотя амплитуда модуляции света в каждом периоде меняется. На рис. 2.4 показаны полутонные нормированные распределения интенсивности в координатах (ρ, z) в диапазоне $|\rho| < 0,1$ мм, $295 < z < 375$ мм, сформированные амплитудно-фазовым (а) и фазовым (б) ДОЭ. Заметим, что в двух предыдущих случаях фаза ДОЭ была радиально симметричной: $m = 0$. В следующем примере фаза ДОЭ уже не будет радиальной. В этом случае отличными от нуля выбирались коэффициенты с номерами $m = 1, n = 0, 1, 2, 3$. Из рис. 2.5 и 2.6 видно, что характер периодичности поля усложняется, и расстояние на котором проявляется модовый характер поля сокращается с 400 мм (рис. 2.3, а) до 300 мм (рис. 2.5, а). Поперечное распределение интенсивности светового поля в данном случае носит кольцевой характер (рис. 2.6, а, б): на оптической оси — нулевая интенсивность. На рис. 2.5 показаны кривые интенсивности при $\rho = 0,01$ мм.

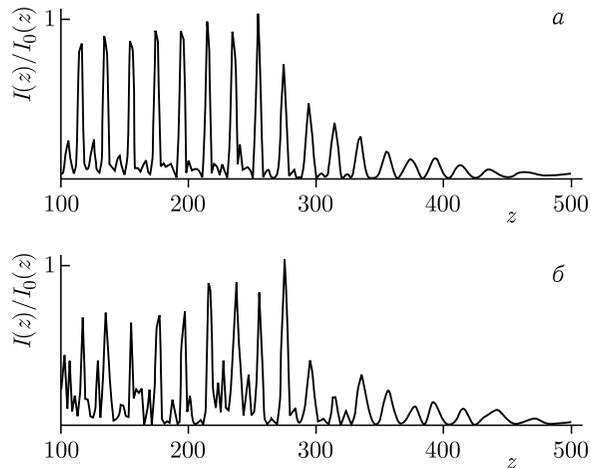


Рис. 2.5. Нормированные распределения интенсивности вдоль оси для амплитудно-фазового (а) и фазового (б) ДОЭ, рассчитанных итеративным алгоритмом с четырьмя первыми слагаемыми суммы (2.20)

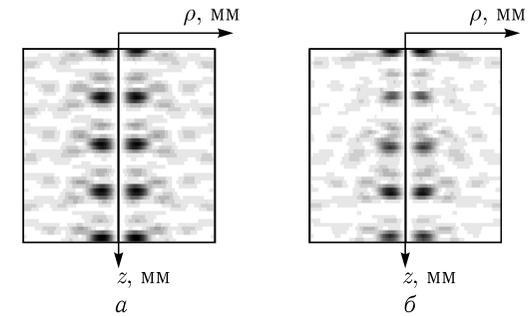


Рис. 2.6. Полутонные нормированные распределения интенсивности в координатах (ρ, z) для амплитудно-фазового (а) и фазового (б) ДОЭ, рассчитанного итеративным алгоритмом с четырьмя первыми слагаемыми суммы (2.20)

Число итераций при котором наступает стагнация сходимости алгоритма, т. е. не происходит заметного изменения ошибки, пропорционально числу ненулевых слагаемых ряда (2.20). Так при выборе одного или двух коэффициентов ряда (2.20) ошибка (2.26) устанавливается за одну – две итерации, при выборе 4-х коэффициентов — за 5–6 итераций.

2.2. Вращение многомодовых пучков Бесселя

В последнее время сохраняется устойчивый интерес к задачам формирования модовых световых пучков с помощью дифракционных оптических элементов (ДОЭ) [28]. Световые поля, обладающие модовой структурой появляются как в свободном пространстве, так и в световых волокнах [27].

Известны методы расчета фазовых ДОЭ, формирующих световые моды Лагерра–Гаусса, Эрмита–Гаусса [16, 28] и моды Бесселя (бездифракционные световые пучки) [17, 60, 78]. В [79] введены в рассмотрение световые поля с продольной периодичностью, являющиеся обобщением бesselевых мод.

Другие алгоритмы для синтеза ДОЭ, формирующих световые пучки с заданными характеристиками распространения в пространстве, имеются в [80, 81].

В данном разделе рассмотрен подкласс световых полей с продольной периодичностью, обладающих коническим спектром плоских волн. Их можно назвать многомодовыми пучками Бесселя. Предложен градиентный алгоритм для расчета фазовых ДОЭ, формирующих такие световые поля. Также выяснены условия, при которых наблюдается вращение поперечного сечения световых бesselевых пучков. Рассмотрен также вопрос о вращении многомодового пучка Лагерра–Гаусса:

распространяющегося в волокне с квадратичной зависимостью показателя преломления. Приведены примеры численного моделирования.

2.2.1. Расчет фазового ДОЭ для формирования вращающегося пучка. Известно, что частным решением уравнения Гельмгольца

$$(\nabla^2 + k^2) U(x, y, z) = 0, \quad (2.31)$$

где k — волновое число, в цилиндрических координатах (r, φ, z) являются функции вида [82]

$$U_{mp}(r, \varphi, z) = J_m \left(r \sqrt{k^2 + \rho^2} \right) \exp(\rho z + im\varphi). \quad (2.32)$$

Общее решение уравнения (2.31) можно представить как линейную комбинацию частных решений:

$$U(r, \varphi, z) = \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} C_{mn} J_m \left(r \sqrt{k^2 + \rho_n^2} \right) \exp(\rho_n z + im\varphi). \quad (2.33)$$

Параметры ρ_n находятся из условия периодичности модуля комплексной амплитуды:

$$|U(r, \varphi, z + z_0)| = |U(r, \varphi, z)|, \quad (2.34)$$

где z_0 — период.

Из уравнения (2.34) следует выражение для амплитуды световых полей с продольной периодичностью:

$$U(r, \varphi, z) = \exp(ik\sigma z) \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} C_{mn} J_m(kr\rho_n) \exp\left(i\frac{2\pi n z}{z_0} + im\varphi\right), \quad (2.35)$$

$$\rho_n = \sqrt{1 - \left(\sigma + n\frac{\lambda}{z_0}\right)^2}, \quad (2.36)$$

где λ — длина волны света, σ — постоянная. Номер n в уравнении (2.35) выбирается из условия положительности подкоренного выражения в уравнении (2.36) и удовлетворяет неравенству

$$-\left[\sigma\frac{z_0}{\lambda}\right] \leq n \leq \left[(1-\sigma)\frac{z_0}{\lambda}\right], \quad (2.37)$$

где [...] — целая часть числа.

В уравнение (2.35) входят слагаемые, описывающие конические волны, распространяющиеся под углами ψ_n к оси z , которые удовлетворяют уравнению, сходному с уравнениями для дифракционной решетки:

$$\cos \psi_n = \cos \psi_0 + n\frac{\lambda}{z_0}, \quad \rho_n = k \sin \psi_n, \quad \sigma = k \cos \psi_0. \quad (2.38)$$

Из уравнения (2.35) следует, что если отличные от нуля коэффициенты C_{mn} имеют одинаковый номер $n = n_0$, то световое поле распространяется без дифракции как бесселевая мода:

$$U(r, \varphi, z) = \exp\left(ik\sigma z + i\frac{2\pi n_0 z}{z_0}\right) \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m J_m(kr\rho_0) e^{im\varphi}, \quad (2.39)$$

где $C_m = C_{mn_0}$, $\rho_0 = \rho_{n_0}$.

Продольная периодичность светового поля (2.35) имеет место когда хотя бы два слагаемых с различными номерами n_1 и n_2 отличны от нуля.

Вращение поперечного сечения светового пучка, описываемого выражением (2.35), является частным случаем продольной периодичности и обеспечивается согласованным выбором отличных от нуля слагаемых с разными номерами n и m . Для получения условия вращения пучка вместо уравнения (2.35) запишем выражение для интенсивности:

$$I(r, \varphi, z) = \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} (C_{mn} J_m(kr\rho_n))^2 + 2 \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \sum_{m',n'=-\infty}^{\infty} C_{mn} C_{m'n'} J_m(kr\rho_n) J_{m'}(kr\rho_{n'}) \times \cos \Phi_{mn}^{m'n'}(r, \varphi), \quad (2.40)$$

$$\Phi_{mn}^{m'n'}(r, \varphi) = \arg C_{mn} - \arg C_{m'n'} + \frac{2\pi(n-n')z}{z_0} + (m-m')\varphi. \quad (2.41)$$

Из выражения (2.41) следует: что все слагаемые в уравнении (2.40) будут иметь одинаковую зависимость полярного угла φ от продольной координаты z при условии

$$\frac{m-m'}{n-n'} = A, \quad n \neq n', \quad m \neq m', \quad (2.42)$$

где A — постоянная величина. Из (2.42) следует, что если в уравнении (2.35) отличны от нуля только два слагаемых, то при любых значениях их номеров $n \neq n'$ и $m \neq m'$ световое поле будет вращаться вокруг оси распространения. Из (2.42) также следует менее общее, но более удобное для использования условие вращения пучка:

$$\frac{m}{n} = A. \quad (2.43)$$

При выполнении условия (2.42) или (2.43) с изменением расстояния на величину Δz значение интенсивности $I(r, \varphi, z)$ в уравнении (2.40) не изменится при выборе величины угла $\varphi + \Delta\varphi$, где

$$\Delta\varphi = -2\pi \frac{\Delta z}{Az_0}. \quad (2.44)$$

Из уравнения (2.44) видно, что если $1/A$ — целое число, то на длине периода z_0 будет совершаться целое число оборотов при вращении пучка. Направление вращения (левое или правое) определяется знаком постоянной A .

2.2.2. Градиентный алгоритм расчета фазового ДОЭ. Рассмотрим ортогональный базис собственных функций колебаний круглой тонкой мембраны с радиусом R [83]:

$$\Omega_{mn}(r, \varphi) = A_{mn} J_m \left(\frac{r}{R} \gamma_{mn} \right) e^{im\varphi}, \quad (2.45)$$

$$A_{mn} = \left[\sqrt{\pi} R J'_m(\gamma_{mn}) \right]^{-1}, \quad (2.46)$$

где $J'_m(x)$ — производная функции Бесселя первого рода m -го порядка, γ_{mn} — корни функции Бесселя: $J_m(\gamma_{mn}) = 0$.

Функцию пропускания ДОЭ $U_0(r, \varphi)$ можно искать как линейную комбинацию функций (2.45). Модули коэффициентов при этом считаются заданными, а их аргументы являются свободными параметрами. Модуль самой функции пропускания $|U_0(r, \varphi)|$ также задан и имеет смысл амплитуды освещающего ДОЭ пучка. Данная линейная комбинация имеет вид

$$U_0(r, \varphi) = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} C_{mn} \Omega_{mn}(r, \varphi). \quad (2.47)$$

Сравнивая вид аргументов функций Бесселя в уравнениях (2.35) и (2.45), можно найти условие, которому должны подчиняться отличные от нуля слагаемые в разложении (2.47):

$$kR\rho_n = \gamma_{mn}. \quad (2.48)$$

Задачу поиска фазы функции $U_0(r, \varphi)$ и, соответственно, аргументов C_{mn} в сумме (2.47) можно сформулировать как задачу минимизации квадратичного критерия:

$$K = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \left[|U_0(r, \varphi)| - \left| \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} C_{mn} \Omega_{mn}(r, \varphi) \right| \right]^2 r dr d\varphi. \quad (2.49)$$

Градиентный метод минимизации критерия (2.49) нетрудно построить, используя результаты работы [84]. При этом итеративная процедура поиска аргументов коэффициентов $\nu_{mn} = \arg C_{mn}$ будет выглядеть следующим образом:

$$\nu_{mn}^{(p+1)} = \nu_{mn}^{(p)} + \tau_p \frac{\partial K}{\partial \nu_{mn}^{(p)}}, \quad (2.50)$$

$$\frac{\partial K}{\partial \nu_{mn}^{(p)}} = 2 \left| C_{mn} \bar{C}_{mn}^{(p)} \right| \sin \left(\nu_{mn}^{(p)} - \bar{\nu}_{mn}^{(p)} \right), \quad (2.51)$$

$$\bar{C}_{mn} = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} F(r, \varphi) \Omega_{mn}^*(r, \varphi) r dr d\varphi, \quad (2.52)$$

$$F(r, \varphi) = |U_0(r, \varphi)| \frac{U(r, \varphi)}{|U(r, \varphi)|} - U(r, \varphi), \quad (2.53)$$

$$U(r, \varphi) = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} C_{mn} \Omega_{mn}(r, \varphi), \quad (2.54)$$

где $\bar{\nu}_{mn} = \arg \bar{C}_{mn}$, p — номер итерации. Модули $|C_{mn}|$ задаются произвольно и являются параметрами задачи, от которых зависит вид поперечного сечения формируемого пучка.

Шаг τ_p в уравнении (2.50), следуя работе [84], можно представить в виде

$$\tau_p = \frac{K}{K_p}, \quad (2.55)$$

$$\bar{K}_p = - \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial K}{\partial \nu_{mn}^{(p)}} \right|^2. \quad (2.56)$$

2.2.3. Вращение многомодового пучка в волокне. В многомодовом световом волокне круглого сечения и с квадратичной зависимостью показателя преломления

$$n^2(r) = n_0^2 \left(1 - 2\Delta \frac{r^2}{r_0^2} \right), \quad (2.57)$$

где n_0 — максимальное значение показателя преломления на оси волокна, r_0 — радиус волокна, Δ — параметр дисперсии показателя преломления, распространяется световое поле, являющееся суперпозицией мод Лагерра–Гаусса (ЛГ-мод) [27]:

$$U(r, \varphi, z) = \sum_{m,n=0}^{\infty} C_{mn} \left(\frac{r\sqrt{2}}{\sigma} \right)^n L_m^n \left(\frac{2r^2}{\sigma^2} \right) \times \exp \left[i\alpha_{mn}z - \frac{r^2}{\sigma^2} \pm in\varphi \right], \quad (2.58)$$

где $\sigma = [\lambda r_0 / (\pi n_0)]^{1/2} (2\Delta)^{-1/4}$, $\alpha_{mn} = [k^2 n_0^2 - 4\sigma^{-2} (2m + n + 1)]^{1/2}$, $L_m^n(x)$ — обобщенный многочлен Лагерра, σ — эффективный радиус первой моды, α_{mn} — коэффициент, пропорциональный фазовой скорости соответствующей моды.

Из-за дисперсии фазовых скоростей мод Лагерра–Гаусса сформированное на входе волокна изображение $U(r, \varphi, z = 0)$ будет деградировать по мере распространения. Чтобы частично компенсировать дисперсию фазовых скоростей мод нужно из суммы (2.58) выбрать такие слагаемые, для которых фазовые скорости некоторым образом

согласованы. Например, можно заставить световой многомодовый пучок, сгенерированный фазовым ДОЭ, вращаться вокруг оси по спирали. Условия вращения поперечного сечения пучка (2.58) аналогичны условиям (2.42) и (2.43) для многомодовых пучков Бесселя и имеют соответственно вид:

$$\frac{\alpha_{mn} - \alpha_{m'n'}}{n - n'} = B, \quad m \neq m', \quad n \neq n', \quad (2.59)$$

$$\frac{\alpha_{mn}}{n} = B, \quad (2.60)$$

где B — постоянная величина. В уравнении (2.59) величины α_{mn} можно приближенно заменить на следующее выражение:

$$\alpha_{mn} \cong kn_0 - \alpha_0(2m + |n| + 1), \quad (2.61)$$

так как $kn_0 \gg \alpha_0$, $\alpha_0 = 2(kn_0\sigma^2)^{-1}$. Например, при характерных параметрах волокна: $r_0 = 10$ мкм, $\Delta = 0,01$, $n_0 = 1,5$, и для видимого света: $k = 10^4$ мм⁻¹, получим следующие значения: $kn_0 = 1,5 \cdot 10^4$ мм⁻¹ и $\alpha_0 = 15$ мм⁻¹.

С учетом уравнения (2.61) условие (2.59) будет иметь более простой вид:

$$\alpha_0 \left[\frac{2(m - m')}{n - n'} + \frac{|n| - |n'|}{n - n'} \right] = B. \quad (2.62)$$

В данном случае условие (2.62) похоже на условие (2.42) для бesselевых мод. Модули в числителе в уравнении (2.62) употреблены, чтобы подчеркнуть, что номера n могут быть и отрицательные. При небольших значениях номеров мод ($m < 10$) приближенное равенство в уравнении (2.61) соблюдается при выбранных параметрах волокна с точностью около 2%.

Период z_0 , на котором будет происходить полный оборот, рассчитывается по формуле

$$z_0 = \frac{2\pi}{|B|} \quad (2.63)$$

и для выбранных параметров равен десяткам, сотням микрон.

2.2.4. Численный расчет. Итеративным алгоритмом рассчитывались фазовые оптические элементы, формирующие световые поля, состоящие эффективно (на 80–90%) из двух-трех мод Бесселя.

Пример бездифракционного пучка или моды Бесселя показан на рис. 2.7 в левом столбце. Параметры расчета следующие: $\lambda = 1,06$ мкм, $z_0 = 20$ мм, $R = 1$ мм, $\sigma = 0,01$. На рис. 2.7 в левом столбце показаны: бинарная фаза ДОЭ (рис. 2.7, а), формирующего световой пучок, эффективно состоящий из двух слагаемых в уравнении (2.35) с номерами (m, n) : $(-3, -3)$, $(3, -3)$. Так как оба слагаемых имеют одинаковый номер $n = -3$, то согласно уравнению (2.39) световое поле при распространении не изменяет свою структуру. Это видно из

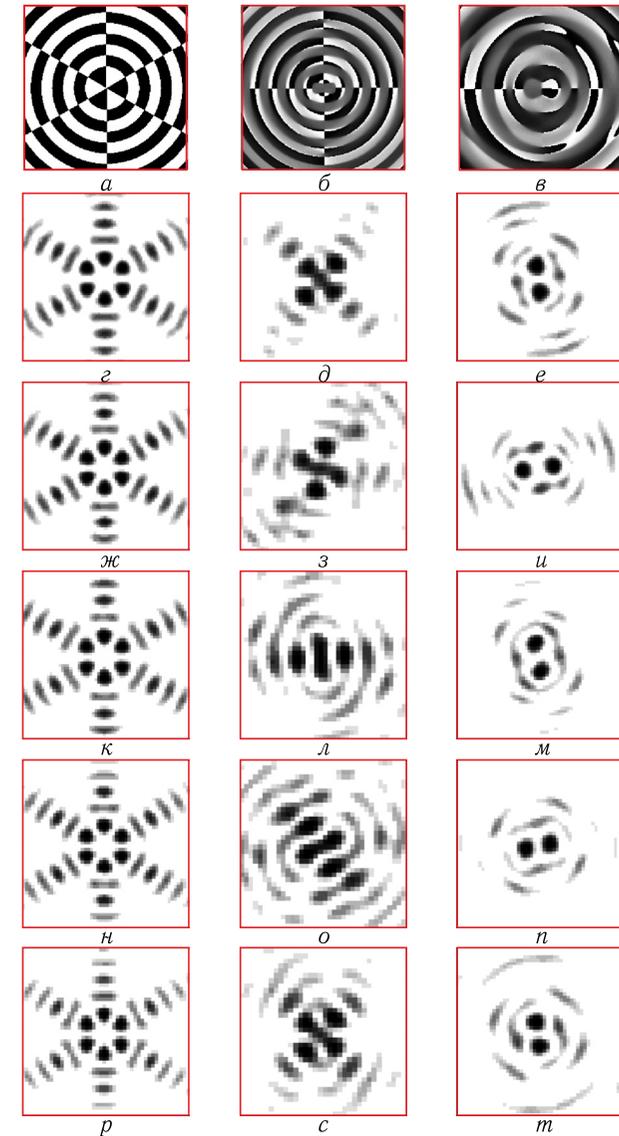


Рис. 2.7. Итеративно рассчитанные фазы ДОЭ (а–в) и поперечные сечения многомодовых бesselевых пучков (г–т), формируемых такими ДОЭ на разных расстояниях. Расстояния, пройденные бездифракционным пучком (левый столбец): 25 мм (а), 30 мм (б), 35 мм (в), 40 мм (г), 45 мм (д), 50 мм (е). Расстояния, пройденные поперечными сечениями при распространении: z : 90 мм (ж), 95 мм (з), 100 мм (и), 105 мм (к), 110 мм (л), 115 мм (м), 120 мм (н), 125 мм (о), 130 мм (п), 135 мм (р), 140 мм (с), 145 мм (т).

рис. 2.7, на котором в левом столбце показаны распределения поперечной интенсивности данного пучка (негатив) на расстояниях z : 25 мм (рис. 2.7, *е*), 30 мм (рис. 2.7, *ж*), 35 мм (рис. 2.7, *к*), 40 мм (рис. 2.7, *л*), 45 мм (рис. 2.7, *м*).

Пример светового поля, периодически изменяющегося при распространении, показан в среднем столбце на рис. 2.7. Параметры расчета: $\lambda = 1,06$ мкм, $z_0 = 20$ мм, $R = 3$ мм, $\sigma = 0,02$. В уравнении (2.35) сохранялись отличными от нуля только три слагаемых с номерами (m, n) : $(-2, -3)$, $(0, -1)$, $(2, -2)$. При этом условия вращения (2.42) и (2.43) не соблюдаются. На рис. 2.7 показаны: полутоновая фаза такого ДОЭ (*б*) (черный цвет -2π , белый 0) и поперечные распределения интенсивности (негатив), сформированные на расстояниях z : 90 мм (рис. 2.7, *д*), 95 мм (рис. 2.7, *з*), 100 мм (рис. 2.7, *л*), 105 мм (рис. 2.7, *о*), 110 мм (рис. 2.7, *с*).

В правом столбце рис. 2.7 показан пример вращающегося многомодового пучка Бесселя. Параметры расчета: $\lambda = 1,06$ мкм, $z_0 = 20$ мм, $R = 2$ мм, $\sigma = 0,015$. В уравнении (2.35) отличными от нуля выбирались только три слагаемых с номерами (m, n) : $(-3, 3)$, $(-1, -1)$, $(1, 1)$. Условия вращения (2.42) и (2.43) для данных номеров соблюдаются. На рис. 2.7 в правом столбце показаны полутоновая фаза ДОЭ (рис. 2.7, *в*), формирующего световой пучок, эффективно содержащий три моды Бесселя, поперечные распределения интенсивности которого (негатив) показаны на расстояниях z : 70 мм (рис. 2.7, *е*), 75 мм (рис. 2.7, *и*), 80 мм (рис. 2.7, *м*), 85 мм (рис. 2.7, *н*), 90 мм (рис. 2.7, *т*). Из рис. 2.7 видно, что имеет место вращение пучка при его распространении, но также видно, что происходят некоторые изменения вида картины поперечного сечения пучка, обусловленные интерференцией трех главных мод (около 90% энергии) с модами высших порядков.

Поперечные картины дифракции на рис. 2.7 вычислялись с помощью преобразования Френеля, которое, в свою очередь, вычислялось с помощью алгоритма быстрого преобразования Фурье.

Аналогично модам Бесселя итеративно рассчитывались фазовые ДОЭ, формирующие световые поля, состоящие эффективно (на 80–90%) из двух-четырех мод Лагерра–Гаусса (ЛГ) и распространяющиеся в многомодовом волокне с квадратичной зависимостью показателя преломления (2.57).

На рис. 2.8 показаны некоторые примеры. Параметры расчета: $r_0 = 10$ мкм, $\Delta = 0,01$, $n_0 = 1,5$, $\lambda = 0,63$ мкм, $R = 0,01$ мм, $\alpha_0 = 15$ мм $^{-1}$.

На рис. 2.8 в левом столбце приведен пример моды ЛГ, распространяющейся в волокне почти без дифракции. В уравнении (2.58) отличными от нуля выбирались только два слагаемых с номерами (m, n) : $(2, -2)$ и $(2, 2)$. При этом уравнения (2.61)–(2.63) приводят к бесконечному периоду $z_0 = \infty$, $B = 0$. На рис. 2.8 показаны бинарная фаза такого ДОЭ (рис. 2.8, *а*) и поперечные сечения сформированного пучка (негатив), рассчитанного на разных расстояниях z : 1 мм (рис. 2.8, *д*),

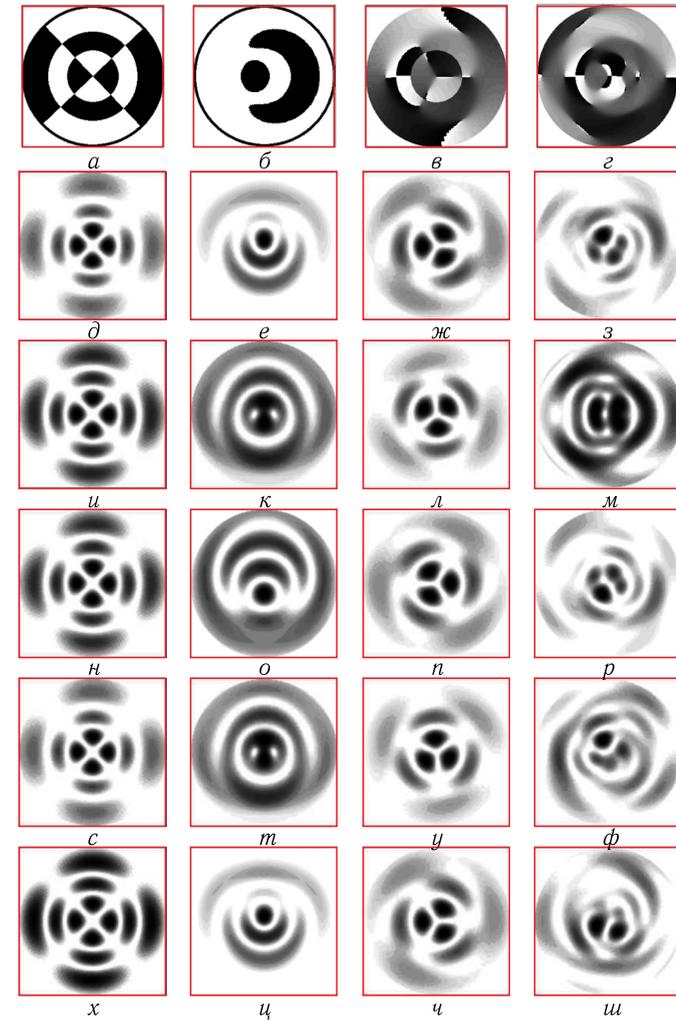


Рис. 2.8. Итеративно рассчитанные фазы ДОЭ (*а–г*) и поперечные сечения многомодовых пучков Лагерра–Гаусса (*д–и*), формируемых такими ДОЭ на разных расстояниях. Расстояния, пройденные модой ЛГ, распространяющейся в волокне почти без дифракции (первый столбец): 1 мм (*д*), 2 мм (*и*), 3 мм (*н*), 4 мм (*с*), 5 мм (*х*). Расстояния, пройденные периодически изменяющимся многомодовым пучком ЛГ (второй столбец): 2,087 мм (*е*), 2,139 мм (*к*), 2,191 мм (*о*), 2,243 мм (*т*), 2,295 мм (*ц*). Расстояния, пройденные вращающимся многомодовым пучком ЛГ (третий столбец): 1 мм (*ж*), 1,156 мм (*л*), 1,313 мм, (*п*), 1,469 мм (*у*), 1,626 мм (*ч*). Расстояния, пройденные четырехмодовым пучком ЛГ, вращающимся с искажением вида поперечной картины (четвертый столбец): 1 мм (*з*), 1,094 мм (*м*), 1,187 мм (*р*), 1,281 мм (*ф*), 1,375 мм (*ш*)

2 мм (рис. 2.8, *и*), 3 мм (рис. 2.8, *н*), 4 мм (рис. 2.8, *с*), 5 мм (рис. 2.8, *х*). Видно, что при распространении такого пучка происходит незначительная модуляция интенсивности, обусловленная периодически изменяющимся влиянием высших мод ЛГ. В расчете учитывались всего 25 мод с соседними номерами.

Пример периодически изменяющегося многомодового пучка ЛГ показан во втором слева столбце на рис. 2.8. В этом случае в уравнении (2.58) отличными от нуля считались слагаемые с номерами (m, n) : $(1, -1)$, $(3, 0)$, $(1, 1)$. Условия вращения (2.59) и (2.60) не соблюдаются, однако полученные значения B оказались кратными, что позволило выделить общий период $z_0 = 0,2087$ мм. На рис. 2.8 во втором слева столбце показаны бинарная фаза ДОЭ (рис. 2.8, *б*) и поперечные сечения светового пучка (негатив) на разных расстояниях z : 2,087 мм (рис. 2.8, *е*), 2,139 мм (рис. 2.8, *к*), 2,191 мм (рис. 2.8, *о*), 2,243 мм (рис. 2.8, *т*), 2,295 мм (рис. 2.8, *ц*). Видно, что происходит периодическая смена картин дифракции при распространении пучка в волокне.

В третьем слева столбце на рис. 2.8 приведен пример вращающегося многомодового пучка ЛГ. В сумме (2.58) сохранялись два слагаемых с номерами (m, n) : $(1, -1)$, $(2, 2)$. Условие вращения (2.59) выполняется, период вращения $z_0 = 0,626$ мм. На рис. 2.8 в третьем слева столбце показаны полутоновая фаза такого ДОЭ (рис. 2.8, *в*) и поперечные сечения пучка (негатив) на разных расстояниях z : 1 мм (рис. 2.8, *ж*), 1,156 мм (рис. 2.8, *л*), 1,313 мм (рис. 2.8, *п*), 1,469 мм (рис. 2.8, *у*), 1,626 мм (рис. 2.8, *ч*).

Заметим, что условию вращения (2.29) удовлетворяют, например, трехмодовые пучки ЛГ со следующими номерами (m, n) : $(1, -1)$, $(5, 0)$, $(11, 2)$, а также $(2, -2)$, $(8, 0)$, $(14, 3)$.

На рис. 2.8 в первом справа столбце приведен пример четырехмодового пучка ЛГ, для которого условие вращения (2.59) не выполняется и поэтому происходит искажение вида поперечной картины пучка. На рис. 2.8 в первом справа столбце показана полутоновая фаза ДОЭ (рис. 2.8, *д*), рассчитанная итеративно с учетом четырех отличных от нуля слагаемых в уравнении (2.58) с номерами (m, n) : $(2, -2)$, $(1, -1)$, $(2, 1)$, $(3, 2)$. Поперечные сечения пучка, сформированного таким ДОЭ, показаны в правом столбце на разных расстояниях z : 1 мм (рис. 2.8, *з*), 1,094 мм (рис. 2.8, *м*), 1,187 мм (рис. 2.8, *р*), 1,281 мм (рис. 2.8, *ф*), 1,375 мм (рис. 2.8, *ш*). Искажение картины поперечного сечения пучка происходит из-за того, что отдельные моды вращаются с разными угловыми скоростями и распространяются с разными фазовыми скоростями, и скорости эти не согласованы друг с другом, как это было в предыдущих случаях, относящихся к рис. 2.8.

В данном разделе получено условие для вращения поперечного сечения светового пучка, являющегося суперпозицией бесселевых мод

(уравнения (2.35) и (2.43)). Разработан итеративный градиентный алгоритм для расчета фазовых высокоэффективных дифракционных оптических элементов, формирующих вращающиеся многомодовые световые бесселевые пучки (уравнения (2.50)–(2.56)). Получено условие для вращения поперечного сечения светового пучка в световом волокне с параболическим профилем показателя преломления, если пучок является суперпозицией мод Лагерра–Гаусса (уравнения (2.58), (2.59) и (2.62)). На численных примерах продемонстрирована работоспособность рассчитанных ДОЭ (рис. 2.7 и 2.8).

2.3. Вращающиеся пучки без орбитального углового момента

В последнее время возрос интерес к вращающимся модовым лазерным пучкам Лагерра–Гаусса (ЛГ) в свободном пространстве [85] или нелинейной среде [86], а также к пустым (hollow) лазерным пучкам [87], эллиптическим пучкам Бесселя [88] и оптическим вихрям с эллиптической симметрией [89]. Вращение лазерных многомодовых пучков впервые рассматривалось в [5, 6, 90]. Известно также, что моды ЛГ, Бесселя и другие обладают орбитальным угловым моментом (ОУМ) [47]. Микрообъекты, помещенные в поперечное сечение таких пучков, будут совершать вращения по замкнутой траектории типа светового кольца [91].

Однако остается не выясненным вопрос о связи между ОУМ лазерного пучка и возможностью вращения распределения интенсивности в его поперечном сечении. Далее мы покажем, что из множества вращающихся световых пучков, комплексную амплитуду которых можно представить как линейную суперпозицию мод ЛГ с определенными номерами (m, n) , есть световые пучки с нулевым ОУМ. Также мы приведем примеры вращающихся световых пучков с нулевым ОУМ, которые являются суперпозицией мод Бесселя и гипергеометрических мод.

Любое параксиальное световое поле, описываемое комплексной амплитудой $E(x, y)$ при $z = 0$ можно разложить в ряд по базису мод ЛГ:

$$E(x, y) = \sum_{n, m} C(n, m) \Psi_{nm}(x, y), \quad (2.64)$$

где $C(n, m)$ — комплексные коэффициенты с номерами n и m , причем m — азимутальный индекс,

$$\Psi_{nm}(x, y) = a^{-1} \sqrt{\frac{n!}{(n + |m|)!}} \left(\frac{r}{a}\right)^{|m|} L_n^{|m|} \left(\frac{r^2}{a^2}\right) \exp\left[-\frac{r^2}{2a^2} + im\varphi\right], \quad (2.65)$$

где $a = \omega_0/\sqrt{2}$, ω_0 — радиус перетяжки гауссового пучка, (r, φ) — полярные координаты, $L_n^m(x)$ — присоединенные многочлены Лагерра.

В [6] приведено условие на номера мод в уравнении (2.64), при которых интенсивность в поперечном сечении многомодового пучка ЛГ будет вращаться при его распространении вдоль оси z :

$$B = \frac{2(n - n') + |m| - |m'|}{m - m'} = \text{const}, \quad (2.66)$$

где (n, m) и (n', m') номера двух любых мод из линейной комбинации (2.64). Постоянная величина $B/4$ равна числу оборотов, которое совершает многомодовый пучок ЛГ от $z = 0$ до $z = \infty$. Причем половину этих оборотов пучок совершит на расстоянии от $z = 0$ до $z = z_0$, где $z_0 = k\omega_0^2/2$ — длина Рэлея, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число света. В [49] получено уравнение для проекции на ось z линейной плотности орбитального углового момента на единицу мощности линейно поляризованного лазерного пучка, состоящего из суперпозиции мод ЛГ (2.64):

$$wJ_z = \frac{\sum_{n,m} m |C(n, m)|^2}{\sum_{n,m} |C(n, m)|^2}, \quad (2.67)$$

где w — циклическая частота света. Из уравнений (2.64)–(2.67) следует: 1) фазы коэффициентов $C(n, m)$ не влияют на значения B и J_z , но влияют на вид интенсивности светового поля из уравнения (2.64) $I(x, y, z) = |E(x, y, z)|^2$; 2) число оборотов согласно уравнению (2.66) при вращении пучка (2.64) зависит только от комбинации номеров мод (n, m) и не зависит от выбора значений коэффициентов $C(n, m)$; 3) ОУМ (2.67) определяется только азимутальными номерами m мод ЛГ и значениями модулей коэффициентов $|C(n, m)|$ и не зависит от выбора номеров n . Поэтому с помощью подходящего выбора комбинации номеров (n, m) и модулей коэффициентов $|C(n, m)|$ можно реализовать различные варианты сочетаний значений B и J_z .

На рис. 2.9 приведены численные примеры. В первой строке показаны распределения интенсивности 4-х модового пучка ЛГ с коэффициентами $C(12, 0) = 1$, $C(11, 2) = 1$, $C(10, -4) = i$, $C(9, 6) = 1$. Такой пучок не вращается ($B = 0$), но имеет положительный ОУМ ($wJ_z = 1$).

Во второй строке рис. 2.9 показаны распределения интенсивности 5-ти модового пучка ЛГ с коэффициентами $C(2, 2) = i$, $C(3, 1) = 1$, $C(4, 0) = -1$, $C(4, -2) = 1$, $C(4, -4) = 1$. Такой пучок вращается влево ($B = -1$) и имеет отрицательный ОУМ ($wJ_z = -3/5$). В третьей строке рис. 2.9 показаны сечения интенсивности 3-х модового пучка ЛГ с коэффициентами $C(10, -2) = 1$, $C(8, 0) = 1$, $C(4, 2) = 1$. Этот пучок вращается влево ($B = -3$), но не обладает ОУМ ($wJ_z = 0$).

И в четвертой строке рис. 2.9 показан 2-х модовый пучок ЛГ с коэффициентами $C(1, -1) = 1$, $C(9, 1) = 1$. Этот пучок вращается вправо ($B = 8$) и также не обладает ОУМ ($wJ_z = 0$). Параметры моделирования: длина волны света $\lambda = 633$ нм; радиус перетяжки

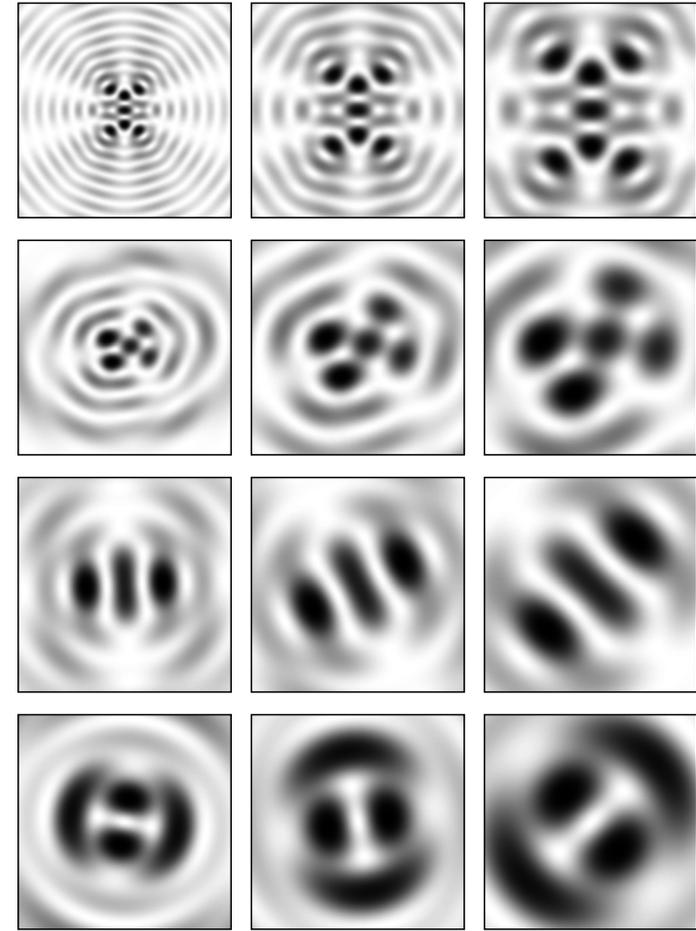


Рис. 2.9. Распределения интенсивности (негатив) в поперечном сечении многомодовых пучков ЛГ, рассчитанных на расстояниях $z = 30$ мм (1-й столбец), $z = 40$ мм (2-й столбец), $z = 50$ мм (3-й столбец) для: 4-х модового (1-я строка), 5-ти модового (2-я строка), 3-х модового (3-я строка) и 2-х модового (4-я строка)

фундаментальной моды ЛГ $\omega_0 = 0,1$ мм; размер каждой картинке на рис. 2.9 — 1×1 мм; расстояние, на котором рассчитывались интенсивности на рис. 2.9 (слева направо) $z = 30$ мм, $z = 40$ мм, $z = 50$ мм.

Для суперпозиции мод Бесселя (2.64) вместо выражения (2.65) запишем:

$$\Psi_{nm}(x, y) = \left[\sqrt{\pi} R J'_m(\gamma_n) \right]^{-1} J_m(k\alpha_n r) \exp(im\varphi), \quad (2.68)$$

где $\alpha_n = \cos \theta_n = \gamma_n/(kR)$, θ_n — угол наклона к оси z конической волны, $J_m(x)$, $J'_m(x)$ — функция Бесселя и ее производная, γ_n — корень функции Бесселя. Моды Бесселя (2.68) нормированы на единицу в круге радиуса R . Лазерный пучок (2.64), состоящий из мод Бесселя будет вращаться [18] на конечном расстоянии от исходной плоскости ($z = 0$) при условии, что номера мод (n, m), входящих в суперпозицию (2.64) будут удовлетворять условию

$$B_1 = \frac{\alpha_n^2 - \alpha_{n'}^2}{m - m'} = \text{const.} \quad (2.69)$$

Число $B_1/2$ равно числу оборотов, которые совершает интенсивность в сечении пучка на расстоянии равном одной длине волны λ .

Проекция на ось z линейной плотности орбитального углового момента лазерного пучка на единицу мощности, состоящего (пучка) из суперпозиции мод Бесселя рассчитывается с помощью уравнения (2.67). Из уравнений (2.67) и (2.69) следует, что подбором номеров (n, m) можно сформировать пучки Бесселя, обладающие вращением интенсивности в поперечном сечении ($B_1 \neq 0$), но имеющие нулевой орбитальный момент ($J_z = 0$). На рис. 2.10 показаны распределения интенсивности 2-модового пучка Бесселя с коэффициентами $C(\alpha_5, 3) = 1$ и $C(\alpha_{10}, -3) = 1$. Такой пучок вращается влево ($B_1 = -12,5 \cdot 10^{-8}$) и не обладает орбитальным моментом ($J_z = 0$). Параметры расчета: $\lambda = 633$ нм, $\alpha_5 = 5 \cdot 10^{-4}$, $\alpha_{10} = 10 \cdot 10^{-4}$, размер картин дифракции на рис. 2.10 — 5×5 мм.

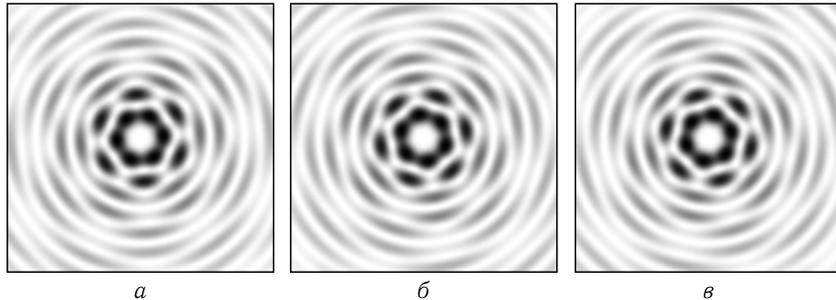


Рис. 2.10. Распределения интенсивности (негатив) в сечении 2-модового пучка Бесселя, рассчитанные на разных расстояниях z от начальной плоскости: 1 м (а), 2 м (б) и 3 м (в)

В [34] приведен ортогональный базис функций, удовлетворяющих параксиальному уравнению распространения. Эти функции можно рассматривать как еще один тип параксиальных световых мод свободного пространства. Мы называем их гипергеометрические (ГГ) моды, так как они описываются через гипергеометрические функции. Как и моды Бесселя ГГ моды обладают бесконечной энергией, и поэтому на прак-

тике их можно сформировать с помощью амплитудно-фазового фильтра или цифровой голограммы с кольцевой апертурой. Поэтому ГГ моды будут сохранять свои модовые свойства только на конечном расстоянии вдоль оптической оси.

Для суперпозиции ГГ мод (2.64) вместо (2.65) и (2.68) запишем ($R \gg 1$):

$$\Psi_{nm}(x, y) = (2\pi r^2 \ln R)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(i \frac{\pi n}{\ln R} \ln r + im\varphi\right), \quad (2.70)$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Эти моды будут ортонормированы в кольце с радиусами R и R^{-1} :

$$\int_{R^{-1}}^R \Psi_{nm}(r, \varphi) \Psi_{n'm'}^*(r, \varphi) r dr d\varphi = \delta_{nn'} \delta_{mm'}, \quad (2.71)$$

где $\delta_{nn'}$ — символ Кронекера. В зоне дифракции Френеля мода (2.70) имеет вид ($R \rightarrow \infty$, $x = kr^2/(2z)$):

$$\Psi_{nm}(r, \varphi, z) = \frac{1}{2\pi |m|!} \left(\frac{2z}{k}\right)^{\frac{i\gamma-1}{2}} \times$$

$$\times \exp\left[\frac{i\pi}{4}(-|m| + i\gamma - 1) + ix + im\varphi\right] \times$$

$$\times x^{\frac{|m|}{2}} \Gamma\left(\frac{|m| + i\gamma + 1}{2}\right) {}_1F_1\left(\frac{|m| + i\gamma + 1}{2}, |m| + 1; -ix\right), \quad (2.72)$$

где $\gamma = \pi n/\ln R$, ${}_1F_1(a, b; x)$ — конфлюэнтная гипергеометрическая функция, $\Gamma(x)$ — гамма-функция.

Условие вращения для многомодового ГГ-пучка имеет вид

$$B_2 = \frac{n - n'}{m - m'} = \text{const}, \quad (2.73)$$

где $B_2/4$ — число оборотов, которые совершит пучок (2.64) с модами (2.70) в промежутке от $z = 1$ до $z = R$. Заметим, что в промежутке от $z = R^{-1}$ до $z = 1$ ГГ-пучок совершит $B_2/4$ оборотов в обратную сторону.

Проекция на ось z линейной плотности орбитального углового момента лазерного пучка (2.64) с модами (2.70) на единицу мощности описывается по-прежнему выражением (2.67). Поэтому, используя условие вращения (2.73) и выражение для орбитального углового момента (2.67) можно сформировать лазерный пучок, у которого, например, будет вращаться поперечное распределение интенсивности, и будет нулевой орбитальный момент. На рис. 2.11 показаны распределения интенсивности двухмодового ГГ-пучка с коэффициентами $C(0, 2) = 1$ и $C(3, -2) = 1$. Такой пучок вращается влево ($B_2 = -0,75$)

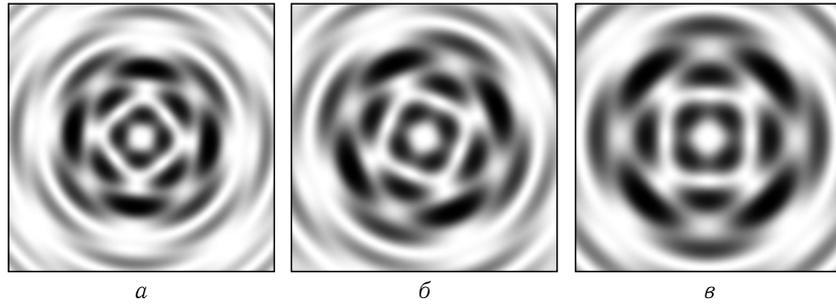


Рис. 2.11. Распределения интенсивности (негатив) в сечении двухмодового ГГ-пучка, рассчитанные на разных расстояниях z от начальной плоскости: 1,5 м (а), 2 м (б) и 2,5 м (в)

и не обладает орбитальным моментом ($J_z = 0$). Параметры расчета: $\lambda = 633$ нм, $\gamma_0 = 0$, $\gamma_3 = 13,597$, размер картин дифракции на рис. 2.11 — 4×4 мм.

Заметим, что в [46] исследован частный случай ГГ-мод при $\gamma = -i$, которые формируются с помощью спиральной фазовой пластинки с пропусканием $\exp(im\varphi)$. Эти моды обладают одинаковыми фазовыми скоростями, и поэтому их линейная комбинация (2.64) не может вращаться при распространении. Это также следует из условия вращения (2.73) при $n = n' = \text{const}$ ($B_2 = 0$).

Ниже приведем некоторые экспериментальные данные. При проведении экспериментов использовался бинарный жидко-кристаллический микродисплей CRL Opto SXGA H1 с разрешением 1280×1024 . На рис. 2.12 показана бинарная фаза, предназначенная для формирования двухмодового пучка Бесселя, представляющего собой

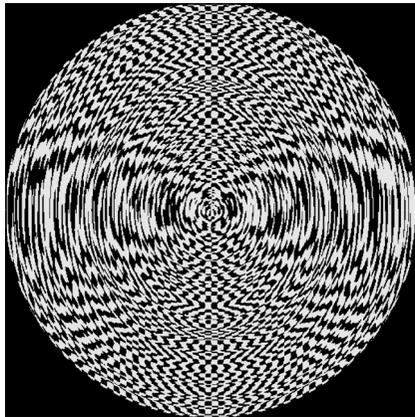


Рис. 2.12. Бинарная фазовая картина, сформированная на микродисплее

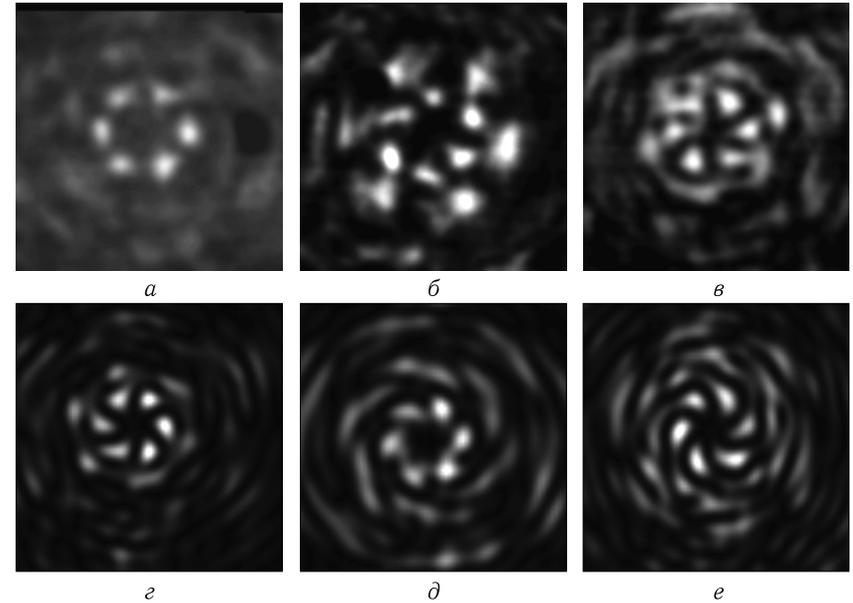


Рис. 2.13. Картина дифракции вращающегося двухмодового пучка Бесселя на разных расстояниях от микродисплея (а–в — эксперимент, г–е — теория): $z = 720$ мм (а, г); $z = 735$ мм (б, д); $z = 765$ мм (в, е)

суперпозицию двух мод Бесселя с номерами $C(\alpha_1, 3) = C(\alpha_2, -3) = 1$ ($\alpha_1 = 1,4 \cdot 10^{-4}$, $\alpha_2 = 7 \cdot 10^{-3}$). Размер сформированной фазы составил 7×7 мм.

Распределения интенсивности в сечении одного из двух сформированных пучков, измеренные на разных расстояниях от микродисплея с помощью CCD камеры, показаны на рис. 2.13.

2.4. Эллиптический пучок Лагерра–Гаусса

В последнее время вырос интерес к эллиптическим гауссовым лазерным пучкам. Так в [92] рассмотрен децентрированный эллиптический гауссовый пучок, распространяющийся в осе-несимметричной оптической системе. Для описания такого пучка используется тензорная техника. В [93] введены в рассмотрение децентрированные эллиптические пучки Эрмита–Гаусса. Эллиптический гауссовый пучок частично-когерентного света исследован в [94]. Дифракция Френеля эллиптического (астигматического) гауссового пучка на дифракционной решетке рассмотрена в [65]. В [96] исследуется распространение такого пучка в одноосном кристалле, а в [97] рассмотрена генерация второй гармоники в нелинейном кристалле с помощью эллиптического пучка.

Гауссовы пучки с различной степенью эллиптичности можно использовать для выравнивания формы пучка [98], т.е. для получения лазерных эллиптических пучков с однородной интенсивностью по сечению пучка. С помощью линейной комбинации эллиптических пучков Эрмита–Гаусса можно сформировать «трубчатые» (полые) эллиптические лазерные пучки, на оси которых будет нулевая интенсивность [99].

В [36–40] введены в рассмотрение и исследованы теоретически [36–39] и экспериментально [40] пучки Айнса–Гаусса. Такие световые поля являются частными решениями параксиального волнового уравнения (типа уравнения Шредингера) в эллиптических координатах. В этих координатах уравнение решается методом разделения переменных, и решение получается в виде произведения гауссовой функции на многочлены Айнса. Многочлены Айнса являются решениями дифференциального уравнения Уиттекера–Хилла. Пучки Айнса–Гаусса являются ортогональным базисом, обобщающим известные модовые базисы Эрмита–Гаусса и Лагерра–Гаусса. Когда эллипс переходит в окружность (эксцентриситет $\varepsilon = 1$), то моды Айнса–Гаусса переходят в моды Лагерра–Гаусса, а при стремлении ε к бесконечности (эллипс переходит в отрезок прямой) моды Айнса–Гаусса переходят в моды Эрмита–Гаусса.

Заметим, что в [41] рассмотрены похожие лазерные пучки, названные модами Эрмита–Лагерра–Гаусса, которые также при определенном значении параметра (угла поворота цилиндрической линзы вокруг оптической оси) переходят в обычные моды Эрмита–Гаусса и Лагерра–Гаусса.

Эллиптические пучки могут также быть сформированы с помощью наклонного падения осе-симметричного пучка на оптический элемент.

В работах [100, 101] рассмотрено наклонное падение лазерного пучка с плоским волновым фронтом на конический аксикон и бинарный дифракционный аксикон. В [100] экспериментально и численно исследовалась картина дифракции, которая образуется при наклонном падении (угол наклона $8\text{--}16^\circ$) коллимированного пучка из гелий-неонового лазера на конический аксикон с углом при вершине $0,01$ радиан и диаметром основания 40 мм. Было показано, что если при осевом освещении основания аксикона формируется световой бездифракционный пучок Бесселя нулевого порядка, то при наклонном падении картина дифракции теряет радиальную симметрию, пучок начинает расходиться и изменять структуру поперечного распределения интенсивности.

Аналогичные исследования были проведены в [101], но вместо обычного аксикона использовался бинарный дифракционный аксикон. Угол наклона падающего света с длиной волны $\lambda = 632,8$ нм был до 10° , диаметр дифракционного оптического элемента (ДОЭ) — $16,4$ мм, а параметр аксикона $\alpha = 0,036$. Функция пропускания акси-

кона имеет вид $\exp(-ik\alpha r)$, где k — волновое число, r — радиальная координата.

В [102] экспериментально и теоретически исследовалась дифракционная картина, которая получается при наклонном падении плоской волны на многоканальный бинарный ДОЭ, пропускание которого пропорционально функции, описывающей 5 бесселевых пучков, распространяющихся под разными углами к оптической оси с амплитудами $J_m(\alpha r) \exp(im\varphi)$, $m = 0, \pm 1, \pm 2$. Было показано, что при этом формируются расходящиеся астигматические бесселевые пучки, картины дифракции которых повернуты на 45° вправо при $m > 0$, и на 45° влево при $m < 0$ и не повернуты при $m = 0$. Причем, чем больше номер моды Бесселя $|m|$, тем больше локальных минимумов и максимумов наблюдается в картине дифракции на фиксированном расстоянии от ДОЭ.

В данном разделе рассматривается распространение эллиптического пучка Лагерра–Гаусса (ЛГ), который уже нельзя считать модой. Показано, что при наклонном падении плоской волны на ДОЭ, функция пропускания которого пропорциональна функции, описывающей моду ЛГ порядка (m, n) , возникает дифракционная картина, которая тождественна дифракционной картине, формируемой эллиптическим пучком ЛГ. При распространении в однородном пространстве эллиптический пучок ЛГ формирует дифракционную картину, которая повернута на $+45^\circ$ при $m > 0$, и на -45° при $m < 0$. Причем число локальных максимумов с ростом расстояния z сначала растет, а потом убывает, и при $z \rightarrow \infty$ (в дальней зоне) формируется картина дифракции, состоящая из набора концентрических эллипсов, повернутых на 90° по отношению к исходной картине дифракции при $z = 0$.

2.4.1. Преобразование Френеля от моды Лагерра–Гаусса.

С помощью справочного интеграла [103]:

$$\int_0^\infty x^{\frac{m}{2}} \exp(-px) J_m(b\sqrt{x}) L_n^m(cx) dx = \left(\frac{b}{2}\right)^m \frac{(p-c)^n}{p^{m+n+1}} \exp\left(-\frac{b^2}{4p}\right) L_n^m\left(\frac{b^2c}{4pc-p^2}\right), \quad (2.74)$$

где $J_m(x)$ — функция Бесселя m -го порядка первого рода, $L_n^m(x)$ — присоединенный многочлен Лагерра, n, m — целые числа, можно найти выражение для преобразования Френеля от моды ЛГ:

$$\Psi_{mn}(r, \varphi) = \left(\frac{r\sqrt{2}}{w_0}\right)^m \exp\left(-\frac{r^2}{w_0^2}\right) L_n^m\left(\frac{2r^2}{w_0^2}\right) \exp(im\varphi), \quad (2.75)$$

где (r, φ) — полярные координаты, w_0 — радиус перетяжки гауссового пучка.

Используя (2.74) и (2.75) получим выражение для амплитуды моды ЛГ на расстоянии z от перетяжки:

$$\begin{aligned} \Psi_{mn}(\rho, \theta, z) &= \frac{-ik}{2\pi z} \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2z} + im\theta\right) \int_0^\infty \left(\frac{r\sqrt{2}}{w}\right)^m \times \\ &\times \exp\left(-\frac{r^2}{w^2} + \frac{ikr^2}{2z}\right) L_n^m\left(\frac{2r^2}{w^2}\right) J_m\left(\frac{kr\rho}{z}\right) r dr = \\ &= \frac{i^m}{2\pi} \frac{w_0}{w(z)} \left(\frac{\rho\sqrt{2}}{w(z)}\right)^m \exp\left[\frac{-\rho^2}{w^2(z)} + \frac{ik\rho^2}{2R(z)} + im\theta - \right. \\ &\quad \left. - i(2n+m+1) \arctg\left(\frac{z}{z_0}\right)\right] L_n^m\left(\frac{2\rho^2}{w^2(z)}\right), \quad (2.76) \end{aligned}$$

где $w(z) = w_0(1 + z^2/z_0^2)^{1/2}$, $R(z) = z(1 + z_0^2/z^2)$, $z_0 = kw_0^2/2$, k — волновое число света.

Из (2.76) видно, что структура моды ЛГ сохраняется и интенсивность является радиально-симметричной функцией

$$I_{mn}(\rho, z) = |\Psi_{mn}(\rho, \theta, z)|^2.$$

С помощью светового поля вида (при $z = 0$)

$$\Psi_{mn}^{(1)}(r, \varphi) = r^{2n+m} \exp\left(-\frac{r^2}{w_0^2} + im\varphi\right) \quad (2.77)$$

можно сформировать обобщенные моды ЛГ, которые также будут радиально-симметричными и будут сохранять свою структуру при распространении с точностью до масштаба. Используем справочный интеграл [103]:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty r^{2n+m} \exp(-pr^2) J_m(cr) r dr &= \\ &= \frac{n!c^m}{2^{m+1}p^{m+n+1}} \exp\left(-\frac{c^2}{4p}\right) L_n^m\left(\frac{c^2}{4p}\right). \quad (2.78) \end{aligned}$$

Тогда преобразование Френеля от исходного светового поля (2.77) с учетом (2.78) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \Psi_{mn}^{(1)}(\rho, \theta, z) &= \frac{-ik}{2\pi z} \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2z} + im\theta\right) \times \\ &\times \int_0^\infty r^{2n+m} \exp\left(-\frac{r^2}{w^2} + \frac{ikr^2}{2z}\right) J_m\left(\frac{kr\rho}{z}\right) r dr = \\ &= \frac{kn!2^{m-1}}{2\pi z} \left(\frac{1}{w_0^2} - \frac{ik}{2z}\right)^{-n-1} \exp\left[\frac{ik\rho^2}{2z} + im\theta\right] x^m \exp(-x) L_n^m(x), \quad (2.79) \end{aligned}$$

где

$$x = \left[\frac{1}{w^2(z)} + \frac{ik}{2\hat{R}(z)}\right] \rho^2, \quad \hat{R}(z) = z\left(1 + \frac{z^2}{z_0^2}\right), \quad w(z) = w_0\sqrt{1 + \frac{z^2}{z_0^2}}.$$

2.4.2. Наклонный параксиальный световой пучок Лагерра–Гаусса. Осветим наклонной плоской волной $\exp(ikr \cdot \cos\varphi \times \sin\gamma)$, γ — угол наклона к оси $x = r \cos(\varphi)$, плоский оптический элемент, пропускание которого пропорционально функции, описывающей моду ЛГ $\Psi_{mn}(r, \varphi)$, радиальную часть которой обозначим

$$\hat{\Psi}_{mn}(r) = \left(\frac{r\sqrt{2}}{w_0}\right)^m \exp\left(-\frac{r^2}{w_0^2}\right) L_n^m\left(\frac{2r^2}{w_0^2}\right). \quad (2.80)$$

Тогда преобразование Френеля от моды ЛГ (2.75) при наклонном освещении будет иметь вид

$$\begin{aligned} F_\gamma(\rho, \theta, z) &= \frac{2\pi(-i)^m k}{z} \exp\left[\frac{ik\rho^2}{2z} + im \arctg\left(\frac{\rho \sin\theta}{z \sin\gamma - \rho \cos\theta}\right)\right] \times \\ &\times \int_0^\infty \hat{\Psi}_{mn}(r) \exp\left(\frac{ikr^2}{2z}\right) J_m \times \\ &\times \left(\frac{kr}{z} \sqrt{z^2 \sin^2\gamma + \rho^2 - 2\rho z \cos\theta \sin\gamma}\right) r dr. \quad (2.81) \end{aligned}$$

В полярных координатах с наклоном:

$$\begin{cases} \xi = \rho \cos\theta - z \sin\gamma, \\ \eta = \rho \sin\theta, \end{cases} \quad (2.82)$$

аргумент функции Бесселя в интеграле уравнения (2.81) будет зависеть только от радиальной составляющей:

$$\xi^2 + \eta^2 = z^2 \sin^2\gamma + \rho^2 - 2\rho z \cos\theta \sin\gamma. \quad (2.83)$$

То есть из уравнения (2.81) с учетом (2.82) и (2.83) следует, что интенсивность наклонной параксиальной моды ЛГ будет радиально-симметричной:

$$I_\gamma(\xi^2 + \eta^2, z) = |F_\gamma(\rho, \theta, z)|^2. \quad (2.84)$$

Чтобы наклонное падение освещающего пучка привело к искажению моды ЛГ требуется рассмотреть непараксиальное распространение света, т.е. от преобразования Френеля перейти к преобразованию Кирхгофа.

Преобразование Кирхгофа от наклонного пучка ЛГ имеет вид:

$$F(\xi, \eta, z) = \frac{-ik}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{mn}(x, y) \frac{\exp(ikR)}{R} dx dy, \quad (2.85)$$

где $R^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + z^2$.

В полярных координатах (2.85) примет вид:

$$F(\rho, \theta, z) = \frac{-ik}{2\pi z} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \Psi_{mn}(r, \varphi) \times \\ \times \exp \left[ik \sqrt{r^2 + \rho^2 + z^2 - 2r\rho \cos(\theta - \varphi)} \right] r dr d\varphi, \quad (2.86)$$

где $R \approx z$ в знаменателе (2.85).

Тогда непараксиальное распространение наклонного пучка ЛГ будет описываться выражением

$$F_{\gamma}(\rho, \theta, z) = \frac{-ik}{2\pi z} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \Psi_{mn}(r, \varphi) \exp \left[ikr \cos \varphi \sin \gamma + \right. \\ \left. + ik \sqrt{r^2 + \rho^2 + z^2 - 2r\rho \cos(\theta - \varphi)} \right] r dr d\varphi. \quad (2.87)$$

Предположим, что $z \gg r$ и $z \gg \rho$ и разложим квадратный корень в показателе экспоненты в (2.87) в ряд Тейлора:

$$\sqrt{z^2 + r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\theta - \varphi)} \approx z + \frac{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\theta - \varphi)}{2z} - \\ - \frac{r^4 + \rho^4 + 2r^2\rho^2 - (4r^3\rho + 4r\rho^3) \cos(\theta - \varphi) + 4r^2\rho^2 \cos^2(\theta - \varphi)}{8z^3} + \dots \quad (2.88)$$

Пусть в уравнении (2.88) $r^4/(8z^3) \ll z$, $4r^3\rho/(8z^3) \ll z$ и $4r\rho^3/(8z^3) \ll z$. Тогда вместо (2.88) получим

$$\sqrt{z^2 + r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\theta - \varphi)} \approx \left(z + \frac{\rho^2}{2z} - \frac{\rho^4}{8z^3} \right) + \left(\frac{r^2}{2z} - \frac{r^2\rho^2}{8z^3} \right) - \\ - \frac{r\rho}{z} \cos(\theta - \varphi) - \frac{r^2\rho^2}{4z^3} \cos 2(\theta - \varphi). \quad (2.89)$$

С учетом (2.89) вместо (2.87) получим

$$F_{\gamma}(\rho, \theta, z) = \frac{-ik}{2\pi z} \exp \left[ik \left(z + \frac{\rho^2}{2z} - \frac{\rho^4}{8z^3} \right) \right] \times$$

$$\times \int_0^{\infty} \widehat{\Psi}_{mn}(r) \exp \left[\frac{ikr^2}{2z} \left(1 - \frac{\rho^2}{z^2} \right) \right] \times \\ \times \left\{ \int_0^{2\pi} \exp \left[im\varphi + ikr \cos \varphi \sin \gamma - \frac{ikr\rho}{z} \cos(\theta - \varphi) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{ikr^2\rho^2}{4z^3} \cos 2(\theta - \varphi) \right] d\varphi \right\} r dr. \quad (2.90)$$

Перепишем интеграл по φ в фигурных скобках в уравнении (2.90) отдельно в виде

$$I_0 = \exp(im\theta) \int_0^{2\pi} \exp \left[im\psi - \frac{ikr\rho_0}{z} \cos(\psi - \nu) - \frac{ikr^2\rho^2}{4z^3} \cos 2\psi \right] d\psi, \quad (2.91)$$

где

$$\begin{cases} \psi = \theta - \varphi, \\ \rho_0^2 = (\rho - z \sin \gamma \cos \theta)^2 + (z \sin \gamma \sin \theta)^2, \\ \nu = \arctg \left(\frac{z \sin \gamma \sin \theta}{\rho - z \sin \gamma \cos \theta} \right). \end{cases} \quad (2.92)$$

Обозначим в (2.91):

$$P = \frac{kr\rho_0}{z}, \quad Q = \frac{kr^2\rho^2}{4z^3}. \quad (2.93)$$

Тогда интеграл (2.91) примет вид

$$I_0 = \exp(im\theta) \int_0^{2\pi} \exp [im\psi - iP \cos(\psi - \nu) - iQ \cos 2\psi] d\psi = \\ = \exp(im\theta) \sum_{p=-\infty}^{\infty} i^p J_p(Q) \int_0^{2\pi} \exp [i2p\psi + im\psi - iP \cos(\psi - \nu)] d\psi = \\ = 2\pi(-i)^m \exp [im(\theta + \nu)] \sum_{p=-\infty}^{\infty} (-i)^p J_p(Q) J_{m+2p}(P) \exp (i2p\nu). \quad (2.94)$$

Отметим, что такое же выражение было получено в [94] для описания астигматического бесселева пучка.

С учетом (2.94) амплитуда светового поля (2.90), описывающего астигматический пучок ЛГ (по аналогии с астигматическим пучком

Бесселя [94]) примет вид:

$$F_\gamma(\rho, \theta, z) = \frac{(-i)^{m+1}k}{z} \exp \left[im(\theta + \nu) + ik \left(z + \frac{\rho^2}{2z} - \frac{\rho^4}{8z^3} \right) \right] \times \\ \times \sum_{p=-\infty}^{\infty} (-i)^p \exp(i2p\nu) \int_0^{\infty} \widehat{\Psi}_{mn}(r) \times \\ \times \exp \left[\frac{ikr^2}{2z} \left(1 - \frac{\rho^2}{z^2} \right) \right] J_p \left(\frac{kr^2 \rho^2}{4z^3} \right) J_{m+2p} \left(\frac{kr\rho_0}{z} \right) r dr. \quad (2.95)$$

Из уравнения (2.95) видно, что астигматический пучок ЛГ не является радиально-симметричным и не сохраняет свою структуру при распространении, так как азимутальный угол θ входит в подынтегральное выражение в уравнении (2.95) в ρ_0 и ν (см. (2.92)).

2.4.3. Эллиптический параксиальный пучок Лагерра–Гаусса. Покажем, что если заменить наклонный пучок ЛГ на эллиптический, то выражение, аналогичное уравнению (2.95) можно получить с помощью преобразования Френеля, а не Кирхгофа. То есть, параксиальный эллиптический пучок ЛГ также не будет сохранять свою структуру и потеряет эллиптичность в зоне дифракции Френеля.

Эллиптический пучок ЛГ при $z=0$ описывается выражением

$$\Psi_{mn}(x, y; \alpha) = \left(\frac{2x^2 + 2\alpha^2 y^2}{w_0^2} \right)^{\frac{m}{2}} \exp \left(-\frac{x^2 + \alpha^2 y^2}{w_0^2} \right) \times \\ \times L_n^m \left(\frac{2x^2 + 2\alpha^2 y^2}{w_0^2} \right) \exp \left[im \arctg \left(\frac{\alpha y}{x} \right) \right]. \quad (2.96)$$

В эллиптических координатах:

$$\begin{cases} x = \alpha r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \end{cases} \quad (2.97)$$

вместо (2.96) получим

$$\Psi_{mn}(r, \varphi; \alpha) = \\ = \left(\frac{\alpha r \sqrt{2}}{w_0} \right)^m \exp \left(-\frac{\alpha^2 r^2}{w_0^2} \right) L_n^m \left(\frac{2\alpha^2 r^2}{w_0^2} \right) \exp(im\varphi). \quad (2.98)$$

При $\alpha = 1$ выражение (2.98) совпадает с выражением (2.75).

Преобразование Френеля в эллиптических координатах (2.97) для пучка (2.98) примет вид:

$$F_\alpha(\rho, \theta, z) = \frac{-ik}{2\pi z} \exp \left[\frac{ik\rho^2}{2z} (\cos^2 \theta + \alpha^2 \sin^2 \theta) \right] \times$$

$$\times \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \widehat{\Psi}_{mn}(\alpha r) \exp \left[im\varphi + \frac{ikr^2}{2z} (\alpha^2 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) - \right. \\ \left. - \frac{ik\alpha r \rho}{z} \cos(\theta - \varphi) \right] r dr d\varphi, \quad (2.99)$$

где $\Psi_{mn}(r, \varphi; \alpha) = \widehat{\Psi}_{mn}(\alpha r) \exp(im\varphi)$.

В уравнении (2.99) использованы эллиптические координаты в плоскости $z > 0$, повернутые на 90° по отношению к координатам в плоскости $z = 0$:

$$\begin{cases} \xi = \rho \cos \theta, \\ \eta = \alpha \rho \sin \theta. \end{cases} \quad (2.100)$$

Выделим в уравнении (2.99) интеграл по углу φ :

$$F_\alpha(\rho, \theta, z) = \frac{-ik}{2\pi z} \exp \left[\frac{ik\rho^2}{2z} (\cos^2 \theta + \alpha^2 \sin^2 \theta) \right] \times \\ \times \int_0^{\infty} \widehat{\Psi}_{mn}(\alpha r) \exp \left[\frac{ikr^2}{4z} (1 + \alpha^2) \right] \times \\ \times \left\{ \int_0^{2\pi} \exp \left[im\varphi - \frac{ikr^2}{4z} (1 - \alpha^2) \cos^2 \varphi - \frac{ik\alpha r \rho}{z} \cos(\theta - \varphi) \right] d\varphi \right\} r dr. \quad (2.101)$$

Выпишем отдельно интеграл по φ в фигурных скобках в уравнении (2.101):

$$\widehat{I}_0 = \int_0^{2\pi} \exp \left[im\varphi - \frac{ikr^2}{4z} (1 - \alpha^2) \cos^2 \varphi - \frac{ik\alpha r \rho}{z} \cos(\theta - \varphi) \right] d\varphi. \quad (2.102)$$

Интеграл (2.102) с точностью до обозначений и множителя перед интегралом совпадает с выражением (2.91). Введем обозначения:

$$A = \frac{k\alpha r \rho}{z}, \quad B = \frac{kr^2(1 - \alpha^2)}{4z}. \quad (2.103)$$

Тогда вместо (2.102) получим

$$\widehat{I}_0 = \sum_{p=-\infty}^{\infty} (-i)^p J_p(B) \int_0^{2\pi} \exp [i2p\varphi + im\varphi - A \cos(\varphi - \theta)] d\varphi = \\ = 2\pi \sum_{p=-\infty}^{\infty} (-i)^{p+m} J_p(B) J_{m+2p}(A) \exp[i(m+2p)\theta]. \quad (2.104)$$

Видно, что ряды в выражениях (2.94) и (2.104) совпадают с точностью до обозначений. Окончательно, из (2.100) и (2.103) получим выражение для дифракции Френеля эллиптического пучка ЛГ:

$$F_\alpha(\rho, \theta, z) = \frac{(-i)^{m+1}k}{z} \exp\left[\frac{ik\rho^2}{2z}(\cos^2\theta + \alpha^2 \sin^2\theta)\right] \times \\ \times \sum_{p=-\infty}^{\infty} (-i)^p \exp[i(2p+m)\theta] \int_0^\infty \widehat{\Psi}_{mn}(\alpha r) \exp\left[\frac{ikr^2}{4z}(1+\alpha^2)\right] \times \\ J_p\left[\frac{kr^2(1-\alpha^2)}{4z}\right] J_{m+2p}\left(\frac{k\alpha r\rho}{z}\right) r dr. \quad (2.105)$$

Заметим, что при $\alpha = 1$ уравнение (2.105) совпадает с уравнением (2.76) для преобразования Френеля моды ЛГ. Действительно, при $\alpha = 1$ все слагаемые ряда по p , кроме $p = 0$, будут равны нулю, так как $J_p(0) = 0$ при $p \neq 0$, а $J_0(0) = 1$.

Заметим также, что при $z \rightarrow \infty$ так, что $r^2/z \ll r\rho/z$, вместо уравнения (2.105) получим преобразование Фурье от эллиптического пучка ЛГ:

$$F_\alpha(\rho, \theta, z \rightarrow \infty) \approx \frac{(-i)^{m+1}k}{z} \exp(im\theta) \times \\ \times \int_0^\infty \widehat{\Psi}_{mn}(\alpha r) J_m\left(\frac{kr\alpha\rho}{z}\right) r dr = \\ = (-i)^m (-1)^n \left(\frac{w_0}{\alpha^2\sigma}\right) \left(\frac{\rho\sqrt{2}}{\sigma}\right)^m \exp\left(-\frac{\rho^2}{\sigma^2}\right) L_n^m\left(\frac{2\rho^2}{\sigma^2}\right), \quad (2.106)$$

где $\sigma = 2z/(kw_0)$, $\rho^2 = \xi^2 + (\eta/\alpha)^2$.

Из уравнения (2.106) видно, что эллиптический пучок ЛГ при $z = 0$ в дальней зоне дифракции при $z \rightarrow \infty$ опять принимает эллиптическую симметрию, но оказывается повернутым на 90° по отношению к пучку при $z = 0$.

При конечном z эллиптическая симметрия пучка ЛГ пропадает. При конечном z в центре картины дифракции ($\rho = 0$) для эллиптического пучка ЛГ с четным $m = 2l \neq 0$ интенсивность будет отлична от нуля, хотя при $z = 0$ и $z \rightarrow \infty$ интенсивность в центре пучка при $\rho = 0$ равна нулю. Действительно, при $\rho = 0$ все слагаемые ряда в (2.105) равны нулю, кроме слагаемого с номером $p = -m/2$, так как $J_{m+2p}(0) = J_0(0) = 1$. Тогда из уравнения (2.105) для четных $m = 2l$

получим:

$$F_\alpha(\rho = 0, \theta, z) \propto \int_0^\infty \widehat{\Psi}_{mn}(\alpha r) \exp\left[\frac{ikr^2}{4z}(1+\alpha^2)\right] J_{\frac{m}{2}}\left[\frac{kr^2}{4z}(1-\alpha^2)\right] r dr, \quad (2.107)$$

где символ \propto означает пропорциональность.

При малой эллиптичности пучка $\alpha \rightarrow 1$, функцию Бесселя в уравнении (2.107) можно заменить приближенным выражением:

$$J_p(x) \cong \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^p}{\Gamma(p+1)}, \quad x \rightarrow 0, \quad (2.108)$$

где $\Gamma(p+1)$ — гамма функция, $p > 0$. Если $p < 0$ то надо воспользоваться равенством $J_{-p}(x) = (-1)^p J_p(x)$, если p — целое.

Тогда интеграл в выражении (2.107) можно представить в виде:

$$F_\alpha(\rho = 0, z) \propto \Gamma^{-1}\left(\frac{m}{2} + 1\right) \left[\frac{k(\alpha^2 - 1)}{8z}\right]^{\frac{m}{2}} \left(\frac{\alpha\sqrt{2}}{w_0}\right)^m \times \\ \times \int_0^\infty r^{2m} \exp\left[-\frac{\alpha^2 r^2}{w_0^2} + \frac{ikr^2(1+\alpha^2)}{4z}\right] L_n^m\left(\frac{2\alpha^2 r^2}{w_0^2}\right) r dr. \quad (2.109)$$

Используя справочный интеграл [103]

$$\int_0^\infty x^m \exp(-px) L_n^m(cx) dx = \frac{\Gamma(m+n+1)(p-c)^n}{n! p^{m+n+1}}, \quad (2.110)$$

для интеграла в выражении (2.109) получим:

$$\int_0^\infty r^{2m} \exp\left[-\frac{\alpha^2 r^2}{w_0^2} + \frac{ikr^2(1+\alpha^2)}{4z}\right] L_n^m\left(\frac{2\alpha^2 r^2}{w_0^2}\right) r dr = \\ = \frac{\Gamma(m+n+1)(-1)^n \exp[i(2n+m+1)\eta]}{n! \left[\frac{\alpha^4}{w_0^4} + \frac{k^2(1+\alpha^2)^2}{8z^2}\right]^{\frac{m+1}{2}}}, \quad (2.111)$$

где $\eta = \arctg[k(1+\alpha^2)w_0^2/(4z^2\alpha^2)]$.

Из (2.111) видно, что модуль интеграла (2.111) всегда отличен от нуля. Только при $\alpha = 1$ из (2.109) следует, что поле $F_\alpha(\rho = 0, z) = 0$. Таким образом мы показали, что даже малая эллиптичность моды ЛГ нарушает условия, при которых в центре пучка при $\rho = 0$ при любом z имеется ноль интенсивности. Но вихревой характер светового поля

при наличии эллиптичности не изменяется, а фазовая сингулярность в центре порядка $m = 2l$ «распадается» на p сингулярностей с m/p номерами (порядками), и p точек нулевой интенсивности возникают вблизи центра пучка. Число p зависит от степени эллиптичности. Как будет показано ниже, при слабой эллиптичности $p = 2$ и под углом 45° появляются два нуля интенсивности $m/2$ -го порядка. Для нечетного $m = 2l + 1$ в центре картины дифракции ($\rho = 0$) всегда остается ноль интенсивности.

Рассмотрим особенности распространения эллиптического пучка ЛГ при слабой эллиптичности ($\alpha^2 \approx 1$). Под интегралом в уравнении (2.105) заменим функцию Бесселя порядка p на приближенное выражение (2.108). Это возможно, во-первых, потому что аргумент функции Бесселя стремится к нулю при малой эллиптичности, а во-вторых, потому что хотя интеграл в (2.105) имеет бесконечный верхний предел интегрирования, но гауссовая экспонента, входящая в моду ЛГ, ограничивает область интегрирования конечным эффективным радиусом моды. Тогда вместо (2.105) запишем:

$$F_{\alpha \rightarrow 1}(\rho, \theta, z) \approx S(\rho, \theta) \sum_{p=-\infty}^{\infty} \left(\frac{-i\varepsilon}{2}\right)^p \Gamma^{-1}(p+1) \exp(i2p\theta) \delta(p) \times \\ \times \int_0^{\infty} \left(\frac{\alpha r \sqrt{2}}{w_0}\right)^m r^{2p} \exp\left[-\frac{\alpha^2 r^2}{w_0^2} - \frac{ikr^2(1+\alpha^2)}{4z}\right] \times \\ \times L_n^m\left(\frac{2\alpha^2 r^2}{w_0^2}\right) J_{m+2p}\left(\frac{k\alpha r \rho}{z}\right) r dr, \quad (2.112)$$

где

$$\delta(p) = \begin{cases} 1, & p \geq 0, \\ (-1)^{|p|}, & p < 0, \end{cases} \quad (2.113)$$

$$S(\rho, \theta) = \frac{(-i)^{m+1} k}{z} \exp\left[im\theta + \frac{ik\rho^2}{2z} (\cos^2\theta + \alpha^2 \sin^2\theta)\right]. \quad (2.114)$$

Заметим, что в уравнении (2.112) слагаемые с положительными и отрицательными номерами p дают различный вклад в общую сумму. Если $m > 0$, то в уравнении (2.112) слагаемое с $p > 0$ будет иметь множитель $\exp[i\theta(m+2p)] r^{|m|+2|p|} J_{m+2p}(x)$, а слагаемое с $p < 0$ — другой множитель $\exp[i\theta(m-2|p|)] r^{|m|+2|p|} J_{m-2|p|}(x)$. Видно, что в первом случае ($p > 0$) в множителе показатель степени радиальной переменной совпадает с порядком функции Бесселя. И наоборот, при $m < 0$ вклад в сумму в (2.112) будут давать слагаемые с $p < 0$.

Справочный интеграл из [103]

$$\int_0^{\infty} x^{\frac{m+p}{2}} \exp(-cx) L_n^m(cx) J_{m+p}(b\sqrt{x}) dx = \\ = \frac{(p-c)^n}{p^{m+n+1}} \left(\frac{b}{2}\right)^m \exp\left(-\frac{b^2}{4p}\right) L_n^m\left(\frac{b^2 c}{4pc-p^2}\right), \quad (2.115)$$

косвенным образом подтверждает эллиптичность: только при равенстве показателя радиальной переменной $x = r^2$ и порядка функции Бесселя происходит самовоспроизведение видоизмененного пучка ЛГ. Хотя в прямую применять интеграл (2.115) к расчету (2.112) нельзя, так как показатель экспоненты в интеграле (2.112) отличается от аргумента присоединенного многочлена Лагерра. Таким образом, оставляя в выражении (2.112) только слагаемые с $p > 0$ (предполагаем, что $m > 0$) и учтя слабую эллиптичность пучка ЛГ, сохраним только первые два слагаемых:

$$F_{\alpha \rightarrow 1}(\rho, \theta, z) \approx S(\rho, \theta) \int_0^{\infty} \left(\frac{\sqrt{2}\alpha r}{w}\right)^m L_n^m\left(\frac{2r^2\alpha^2}{w^2}\right) \times \\ \times \exp\left[-\frac{r^2\alpha^2}{w^2} + \frac{ikr^2(1+\alpha^2)}{4z}\right] \times \\ \times \left\{ J_m\left(\frac{k\alpha r \rho}{z}\right) - \frac{i\varepsilon r^2}{2} e^{i2\theta} J_{m+2}\left(\frac{k\alpha r \rho}{z}\right) + O(\varepsilon^2) \right\} r dr, \quad (2.116)$$

где $\varepsilon = k(1-\alpha^2)/(4z) \ll 1$ — малый параметр.

Известен ряд [100]:

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{t^{2p} J_{m+2p}(x)}{(2p)!} = \\ = \frac{1}{2} x^{-\frac{m}{2}} J_m(\sqrt{x^2 - 2tx}) \times \{(x-2t)^{-\frac{m}{2}} + (x+2t)^{-\frac{m}{2}}\}. \quad (2.117)$$

Предположим, что $t \ll 1$, тогда вместо (2.117) можно приближенно записать:

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{t^{2p} J_{m+2p}(x)}{(2p)!} \approx J_m(x) + \frac{t^2}{2} J_{m+2}(x) + O(t^4). \quad (2.118)$$

Сравнивая выражение в фигурных скобках в (2.116) с правой частью (2.118) и с учетом (2.117), получим вместо (2.116):

$$F_{\alpha \rightarrow 1}(\rho, \theta, z) \approx S'(\rho, \theta) \int_0^\infty \left(\frac{\sqrt{2} \alpha r}{w} \right)^m L_n^m \left(\frac{2r^2 \alpha^2}{w^2} \right) \times \\ \times \exp \left[-\frac{r^2 \alpha^2}{w^2} + \frac{ikr^2(1+\alpha^2)}{4z} \right] \times \\ \times J_m \left(r \sqrt{\left(\frac{k\alpha\rho}{z} \right)^2 - \sqrt{-i\varepsilon} e^{i\theta} \left(\frac{k\alpha\rho}{z} \right)} \right) r dr, \quad (2.119)$$

где

$$S'(\rho, \theta) = S(\rho, \theta) \frac{1}{2} \left(\frac{k\alpha\rho}{z} \right)^{\frac{m}{2}} \times \\ \times \left\{ \left(\frac{k\alpha\rho}{z} - 2\sqrt{-i\varepsilon} e^{i\theta} \right)^{-\frac{m}{2}} + \left(\frac{k\alpha\rho}{z} + 2\sqrt{-i\varepsilon} e^{i\theta} \right)^{-\frac{m}{2}} \right\}.$$

Из уравнения (2.119) видно, что при $\rho \rightarrow \infty$ оно (2.119) переходит в уравнение (2.76) для преобразования Френеля от моды ЛГ:

$$F_{\alpha \rightarrow 1}(\rho \rightarrow \infty, \theta, z) \approx S(\rho, \theta) \int_0^\infty \left(\frac{\sqrt{2} \alpha r}{w} \right)^m L_n^m \left(\frac{2r^2 \alpha^2}{w^2} \right) \times \\ \times \exp \left[-\frac{r^2 \alpha^2}{w^2} + \frac{ikr^2(1+\alpha^2)}{4z} \right] J_m \left(\frac{k\alpha\rho r}{z} \right) r dr, \quad (2.120)$$

которое вычисляется с помощью справочного интеграла (2.74).

Уравнение (2.120) показывает, что для слабой эллиптичности пучок ЛГ на периферии ведет себя как обычная мода ЛГ, но с эллиптической симметрией, то есть картина дифракции представляет собой набор не концентрических колец, а эллипсов. В центральной части картины дифракции эллиптического пучка ЛГ при малых ρ , как следует из уравнения (2.119), изолированные нули интенсивности будут располагаться в тех точках, в которых обращается в нуль аргумент функции Бесселя в уравнении (2.119):

$$\rho = \frac{1}{2\alpha} \sqrt{\frac{z}{k}(1-\alpha^2)} e^{i(\theta - \frac{\pi}{4})}. \quad (2.121)$$

Из (2.121) следует, что два действительных нуля $m/2$ -го порядка интенсивности лежат на прямой $\theta = \pi/4$ на расстоянии от центра $\rho = 0$,

равном

$$\rho_0 = \frac{1}{2\alpha} \sqrt{\frac{z(1-\alpha^2)}{k}}. \quad (2.122)$$

Из (2.122) видно, что чем больше эллиптичность пучка $(1-\alpha^2)$ и расстояние от перетяжки z , тем больше ρ_0 и тем дальше нули интенсивности располагаются от центра $\rho_0 = 0$.

Заметим, что из (2.119) следует, что при $\rho = 0$ также будет ноль интенсивности, но это не так. Дело в том, что уравнение (2.119) не учитывает слагаемые в уравнении (2.112) с отрицательными $\rho < 0$, которые при $\alpha \approx 1$ малы, но не равны нулю. Ранее было доказано, что главный вклад в значение интенсивности эллиптического пучка ЛГ определяется слагаемым вида (2.117), которое всегда отлично от нуля при конечных z .

Чтобы понять физический смысл того, почему исходный ноль интенсивности m -го порядка в центре картины дифракции при $z = 0$ «исчезает» при $z > 0$, представим интенсивность эллиптического пучка ЛГ в виде интерференции двух полей.

Из уравнения (2.116) следует:

$$|F_{\alpha \rightarrow 1}(\rho, \theta, z)|^2 \approx \left| F_0(\rho) - \frac{ik(1-\alpha^2)}{8z} e^{2i\theta} F_1(\rho) \right|^2, \quad (2.123)$$

где

$$F_0(\rho) = \frac{k}{z} \int_0^\infty \left(\frac{\sqrt{2} \alpha r}{w} \right)^m L_n^m \left(\frac{2r^2 \alpha^2}{w^2} \right) \times \\ \times \exp \left[-\frac{r^2 \alpha^2}{w^2} + \frac{ikr^2(1+\alpha^2)}{4z} \right] J_m \left(\frac{k\alpha\rho r}{z} \right) r dr, \quad (2.124)$$

$$F_1(\rho) = \frac{k}{z} \int_0^\infty \left(\frac{\sqrt{2} \alpha r}{w} \right)^m L_n^m \left(\frac{2r^2 \alpha^2}{w^2} \right) \times \\ \times \exp \left[-\frac{r^2 \alpha^2}{w^2} + \frac{ikr^2(1+\alpha^2)}{4z} \right] J_{m+2} \left(\frac{k\alpha\rho r}{z} \right) r dr. \quad (2.125)$$

Из (2.123)–(2.125) видно, что структура картины дифракции пучка ЛГ со слабой степенью эллиптичности не обладает ни радиальной, ни эллиптической симметрией. Интеграл (2.124) может быть вычислен с помощью уравнения (2.74). Из (2.123) также видно, что с ростом z вклад второго слагаемого уменьшается и при $z \rightarrow \infty$ вместо (2.123) получается (2.106), т. е. эллиптический пучок ЛГ, повернутый на 90° по отношению к входному пучку ЛГ при $z = 0$. Из (2.123) следует, что два световых поля $F_0(\rho)$ и $F_1(\rho)$ сложатся в «фазе» на линии $\theta = -\pi/4$. Если бы мы рассмотрели разложение (2.112) при $m < 0$,

то получили бы уравнение аналогичное (2.123), но два световых поля $F_0(\rho)$ и $F_1(\rho)$ складывались бы в «фазе» при $\theta = \pi/4$. То есть эллиптический пучок ЛГ при своем распространении имеет такую дифракционную картину в своем сечении, которая позволяет определить левую ($m < 0$) или правую ($m > 0$) «закрутку фазы» имеет исходный пучок ЛГ при $z = 0$. Причем поворот картины дифракции на угол $\pm \pi/4$ в зоне Френеля не зависит от величины номера $|m|$. В дальней зоне дифракции эллиптический пучок ЛГ поворачивается на $\pm 90^\circ$ по отношению к исходному, и уже нельзя отличить направление вращения и знак номера $\pm |m|$.

Примеры изменения картины дифракции эллиптического пучка ЛГ показаны в последующих подразделах.

2.4.4. Результаты численного моделирования. По картинам интенсивности на рис. 2.14 можно проследить справедливость теоретических выкладок: по мере формирования светового пучка за ДОО он приобретает наклон в 45° , а в дальней зоне наблюдается поворот всей картины на 90° . По мере увеличения расстояния z , количество локальных максимумов сначала растет, а потом начинает убывать, как и было предсказано. Кроме того видно, что при конечном z в центре картины дифракции нет нуля интенсивности, а два нуля интенсивности возникают вдоль линии под углом в 45° .

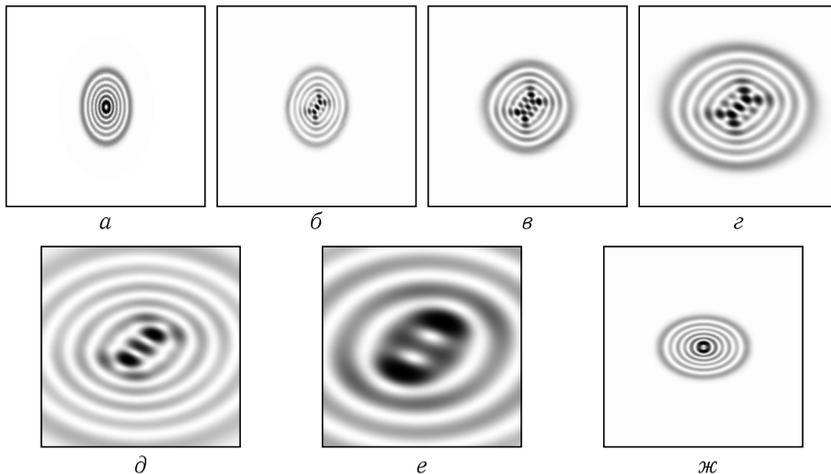


Рис. 2.14. Распространение моды ЛГ (5, 2) с эллиптическим искажением в свободном пространстве (негатив). Размер изображения 5×5 мм, 256×256 отсчетов. Характерный гауссовский радиус пучка $\sigma = 0,391$ мм, длина волны $\lambda = 0,63$ мкм, коэффициент эллиптичности $\alpha = 0,66$, расстояния от начальной плоскости $z = 0$ мм (а), $z = 500$ мм (б), $z = 1000$ мм (в), $z = 2000$ мм (г), $z = 4000$ мм (д), $z = 8000$ мм (е), $z = \infty$ (ж)

Картина распространения моды ЛГ (2,2) также подтверждает теоретические выводы. Мы имеем два предсказанных локальных минимума вблизи центра изображения так же, как и в случае моды ЛГ (5,2) на рис. 2.14, и также в центре картины при $z \neq 0$ нет нуля интенсивности.

Поведение светового пучка, изображенного на рис. 2.16 (моды ЛГ (3, -1)), в целом аналогично рис. 2.14 и 2.15, с той лишь разницей, что мы имеем лишь один центральный локальный минимум, так как индекс моды $m = -1$. Кроме того, в данном случае наблюдается поворот на -45° в срединной области распространения.

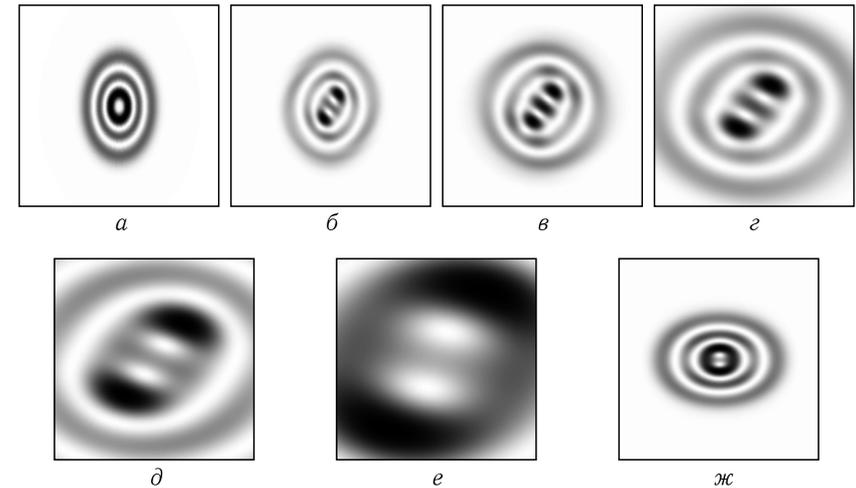


Рис. 2.15. Распространение моды ЛГ (2,2) с эллиптическим искажением в свободном пространстве. Коэффициент эллиптичности $\alpha = 0,66$, расстояния от начальной плоскости $z = 0$ мм (а), $z = 500$ мм (б), $z = 1000$ мм (в), $z = 2000$ мм (г), $z = 4000$ мм (д), $z = 8000$ мм (е), $z = \infty$ (ж)

Интересным примером является распространение моды ЛГ (2,0). При этом не наблюдается появления локальных минимумов в центральной части, однако видны любопытные эффекты в первом кольце моды. При $m = 0$ центральная часть картины подвергается наибольшей трансформации (приобретает вид квадрата) на расстоянии близком к $z_0 \approx 1000$ мм. Внешние кольца при этом вместо эллипсов остаются окружностями. Похожий эффект наблюдается при уменьшении величины эллиптического искажения (см. рис. 2.18). Тем не менее, эффект поворота изображения на 90° в Фурье-плоскости по-прежнему проявляется в неизменном виде.

На рис. 2.18 показано распространение моды ЛГ (5,2) с малым коэффициентом эллиптичности $\alpha = 0,91$. При этом количество локальных минимумов-максимумов значительно уменьшается. Остаются

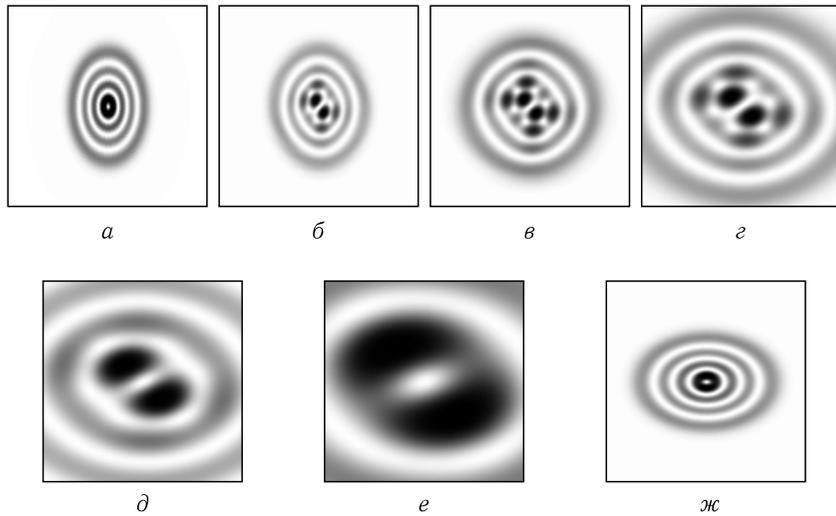


Рис. 2.16. Распространение моды ЛГ (3,-1) с эллиптическим искажением в свободном пространстве. Коэффициент эллиптичности $\alpha = 0,66$, расстояния от начальной плоскости $z = 0$ мм (а), $z = 500$ мм (б), $z = 1000$ мм (в), $z = 2000$ мм (г), $z = 4000$ мм (д), $z = 8000$ мм (е), $z = \infty$ (ж)

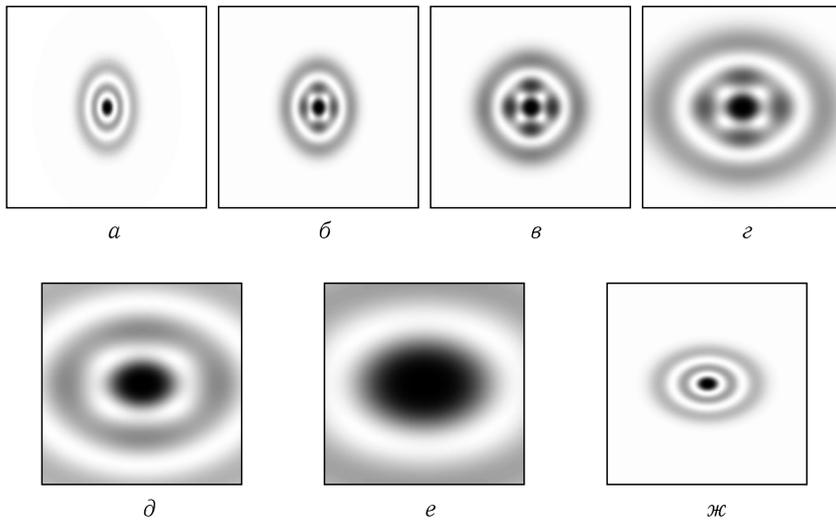


Рис. 2.17. Распространение моды ЛГ (2,0) с эллиптическим искажением в свободном пространстве. Коэффициент эллиптичности $\alpha = 0,66$, расстояния от начальной плоскости $z = 0$ мм (а), $z = 500$ мм (б), $z = 1000$ мм (в), $z = 2000$ мм (г), $z = 4000$ мм (д), $z = 8000$ мм (е), $z = \infty$ (ж)

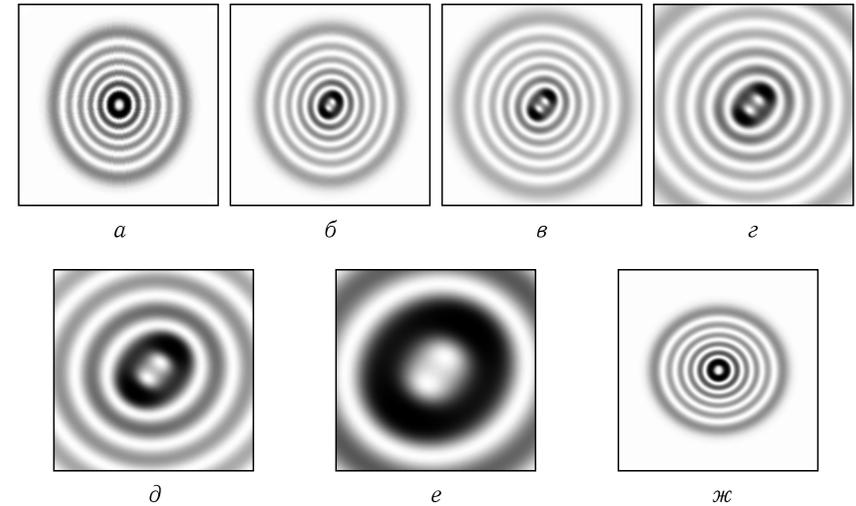


Рис. 2.18. Распространение моды ЛГ (5,2) с эллиптическим искажением в свободном пространстве. Коэффициент эллиптичности $\alpha = 0,91$, расстояния от начальной плоскости $z = 0$ мм (а), $z = 500$ мм (б), $z = 1000$ мм (в), $z = 2000$ мм (г), $z = 4000$ мм (д), $z = 8000$ мм (е), $z = \infty$ (ж)

лишь 2 центральных локальных минимума, которые позволяют определить индекс моды $m = 2$. Как видно из представленных картин моделирования распространения мод ЛГ, количество околоцентральных локальных максимумов-минимумов зависит от порядков (n, m) мод ЛГ и от величины коэффициента эллиптичности. Таким образом, их число варьируется при изменении степени эллиптического искажения, т. е. угла наклона ДОЭ для одних и тех же мод ЛГ.

2.4.5. Эксперимент. Для проведения экспериментов с астигматическими пучками ЛГ использовался многопорядковый дифракционный оптический элемент (ДОЭ), согласованный с 42 модами ЛГ. ДОЭ был изготовлен по технологии электронной литографии на технологической базе Университета Йёнсуу (Финляндия). Вид фазы ДОЭ, схема соответствия номеров мод дифракционным порядкам и расчетное распределение интенсивности в фокальной плоскости линзы приведены на рис. 2.19. Параметры ДОЭ: бинарный микрорельеф имеет высоту 692 нм, оптимальную для излучения с длиной волны 633 нм, диаметр — 10 мм, шаг дискретизации — 5 мкм.

ДОЭ, представленный на рис. 2.19 формирует в симметричных дифракционных порядках моды ЛГ с одинаковыми индексами и противоположными знаками «сингулярности». Определить знак и порядок «сингулярности» моды можно, повернув ДОЭ на некоторый угол относительно оптической оси. Так, на рис. 2.20 можно видеть экспериментально зафиксированную картину распределения интенсивности

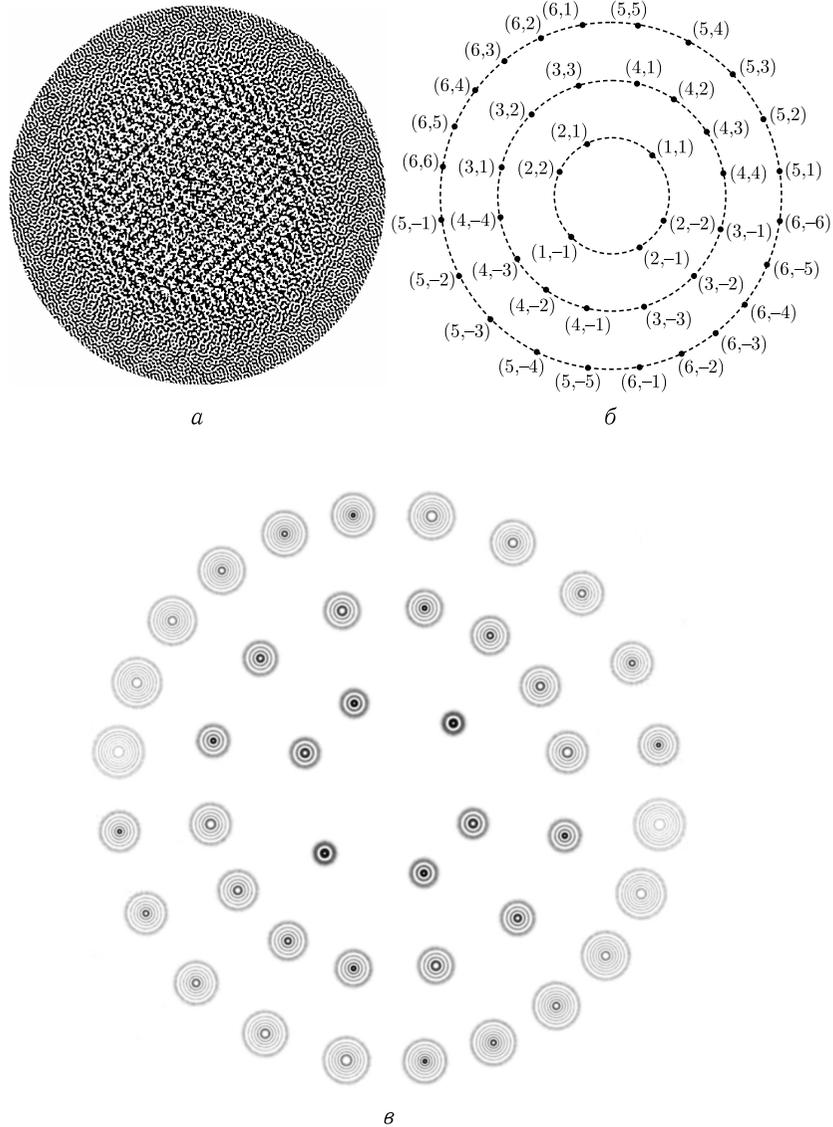


Рис. 2.19. 42-порядковый бинарный ДОЭ, формирующий моды ЛГ: фаза (а), схема соответствия номеров мод дифракционным порядкам (б), расчетное распределение интенсивности в фокальной плоскости линзы (в)

на расстоянии около $z = 400$ мм от ДОЭ, повернутого относительно оптической оси, при освещении его коллимированным излучением гелий-неонового лазера (длина волны 633 нм), ограниченным круглой

диффрагмой. На рис. 2.20 можно видеть, что моды, имеющие разные знаки сингулярности, «вытянулись» во взаимно-перпендикулярных направлениях. На рис. 2.21 показана аналогичная картина только несколько подробнее (менее сходящийся освещающий пучок и меньший наклон ДОЭ). Видно, что при небольшой степени астигматизма «развал» на отдельные нули происходит для пучком с невысоким порядком сингулярности ($|m| = 1, 2$). Для $|m| > 3$ центральное кольцо хоть и деформируется, но еще не «дробится» на отдельные нули.

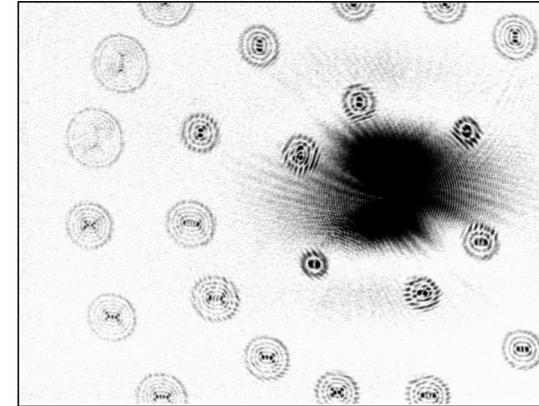


Рис. 2.20. Экспериментальное распределение интенсивности (получены в сходящемся освещающем пучке) при наклоне ДОЭ относительно оптической оси

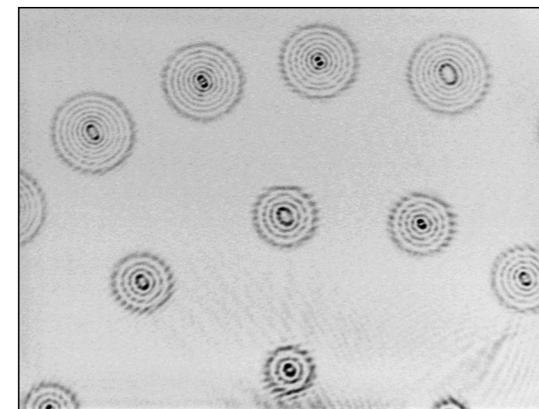


Рис. 2.21. Экспериментальное распределение интенсивности (получены в сходящемся освещающем пучке) при небольшом наклоне ДОЭ относительно оптической оси

На рис. 2.22 можно было проследить как при увеличении наклона ДОЭ мода ЛГ $(n, m) = (5, 4)$ постепенно трансформируется к виду, очень близкому к модам Эрмита–Гаусса.

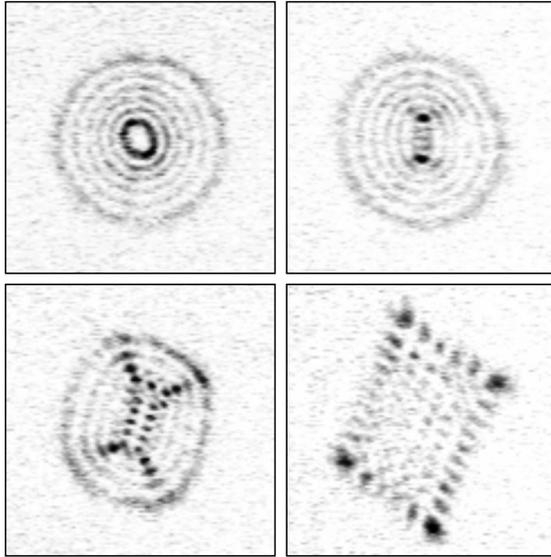


Рис. 2.22. Экспериментальное распределение интенсивности для моды ЛГ $(n, m) = (5, 4)$ при различных углах наклона ДОЭ относительно оптической оси

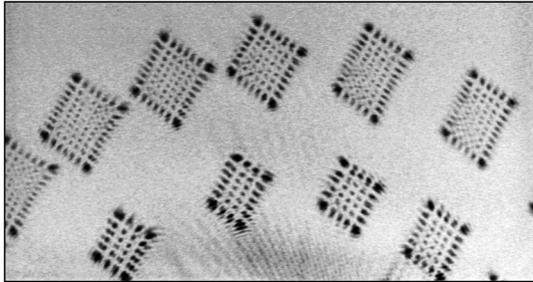


Рис. 2.23. Экспериментальные распределения интенсивности при угле наклона ДОЭ относительно оптической оси, близком к 90°

Из рис. 2.23 можно видеть, что при сильном наклоне ДОЭ моды ЛГ принимают вид мод Эрмита–Гаусса. При этом соответствие номеров мод следующее:

$$\begin{aligned} n_{GH} &= n_{GL}, \\ m_{GH} &= n_{GL} + |m_{GL}|. \end{aligned} \quad (2.126)$$

В данном разделе аналитически и численно исследовано распространение параксиального эллиптического пучка Лагерра–Гаусса. Показано, что если в начальной плоскости сечения пучок имеет структуру в виде софокусных эллипсов с нулевой интенсивностью на оптической оси, если номер m спиральности (или сингулярности) фазы пучка отличен от нуля, то при распространении в зоне дифракции Френеля в центре пучка на оптической оси интенсивность будет отличаться от нуля. При этом фазовая осевая сингулярность m -го порядка «распадается» на p сингулярностей m/p -го порядка, и вблизи осевой точки в сечении пучка возникают p нулей интенсивности. Число нулей p зависит от степени эллиптичности пучка α . Так, при малой степени эллиптичности $(1 - \alpha^2) \ll 0$ комплексную амплитуду пучка можно эффективно представить в виде суперпозиции двух слагаемых, которая приводит к появлению двух ($p = 2$) нулей интенсивности $m/2$ -го порядка сингулярности при четном числе m . Эти нули «лежат» в сечении пучка на прямой линии, составляющей с осью x угол на $+45^\circ$ при $m > 0$ и -45° при $m < 0$. С увеличением степени эллиптичности пучка растет число слагаемых в суперпозиции и число p изолированных нулей интенсивности. При дальнейшем распространении пучка вдоль оптической оси слагаемые в суперпозиции, зависящие от расстояния как z^{-q} , $q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, будут давать все меньший вклад в общую сумму, и при $z \rightarrow \infty$ (дальняя зона) сформируется пучок ЛГ с эллиптической симметрией m -го порядка сингулярности с нулевой интенсивностью на оптической оси, сечение которого тождественно сечению исходного пучка (при $z = 0$), но повернуто по отношению к нему на 90 градусов. Численные и натурные эксперименты подтвердили теоретические выводы. На основе численного моделирования показано как видоизменяется картина дифракции эллиптического пучка ЛГ на различных расстояниях при одинаковой степени эллиптичности. При проведении экспериментов распределение интенсивности пучка ЛГ фиксировалось на одном и том же расстоянии, но при различном наклоне ДОЭ к оптической оси. При этом можно было проследить как при увеличении наклона ДОЭ моды ЛГ постепенно трансформировались к виду очень близкому к модам Эрмита–Гаусса.

Глава 3

ВРАЩЕНИЕ ВИХРЕВЫХ ПУЧКОВ В БЛИЖНЕЙ ЗОНЕ

3.1. Вращение пучка при дифракции на спиральной фазовой пластинке

Исследованию вихревых лазерных пучков посвящено много статей. Вихревые пучки обладают круговой симметрией и имеют хорошо известную форму в виде «пончика» (doughnut). Как правило, такие пучки формируются с помощью спиральной фазовой пластинки (СФП). Впервые СФП исследовалась в [42]. Вихревые пучки обладают орбитальным угловым моментом как у пучков Лагерра–Гаусса [47]. Параксиальная дифракция гауссова пучка на СФП исследовалась в [104]. Также рассматривалась параксиальная дифракция на СФП неограниченной [46, 105] и ограниченной плоской волны [106, 107]. В этих работах СФП рассматривается в приближении бесконечно тонкого транспаранта и для анализа дифракции на СФП используются интегральные преобразования Фурье, Френеля или Кирхгофа. При использовании этой теории получается, что в случае освещения СФП m -го порядка радиально-симметричным пучком света с амплитудой в полярных координатах $E(r, \theta, 0) = A(r)$ на расстоянии z формируется световой пучок также с радиальной симметрией, но со спиральной фазой:

$$E(\rho, \theta, z) = (-i)^{m+1} \frac{k}{z} \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2z} + im\theta + ikz\right) \times \int_0^\infty A(r) \exp\left(\frac{ikr^2}{2z}\right) J_m\left(\frac{k\rho r}{z}\right) r dr, \quad (3.1)$$

где (ρ, θ) — полярные координаты в плоскости, поперечной оптической оси, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число света, λ — длина волны света в вакууме, $J_m(x)$ — функция Бесселя.

В данном разделе СФП рассматривается без использования приближения тонкого транспаранта. Тремя способами (лучевой оптикой, скалярной волновой теорией и FDTD-методом) показано, что в ближ-

ней ($z < z_p$, z_p — число Френеля) и средней ($z > z_p$) зонах дифракции рефракционная спиральная пластинка с топологическим зарядом $m = 1$ и со скачком рельефа формирует асимметричный оптический вихрь (сломаный пончик). Для $m = 3$ нарушение симметрии оптического вихря показано экспериментально.

3.1.1. Ход лучей после спиральной фазовой пластинки. Рассмотрим СФП с единичным топологическим зарядом в геометрооптическом приближении. Она представляет собой элемент, глубина микрорельефа которого в полярных координатах описывается выражением $h(r, \varphi) = \lambda\varphi/[2\pi(n-1)]$. Для стеклянной СФП ($n = 1,5$ — показатель преломления) глубина равна

$$h(r, \varphi) = \frac{\lambda\varphi}{\pi}, \quad \varphi \in [0, 2\pi), \quad (3.2)$$

т. е. максимальная толщина пластинки равна 2λ (рис. 3.1).

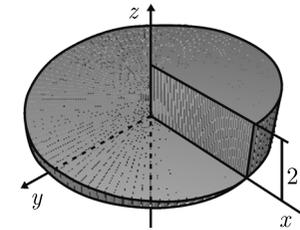


Рис. 3.1. СФП первого порядка с глубиной рельефа (3.2)

Пусть световой луч распространяется в вакууме параллельно оптической оси и падает на оптический элемент в точке с декартовыми координатами $\mathbf{x} = (x, y)$. Внутри СФП с показателем преломления n его волновой вектор равен $\mathbf{k}_1 = (0, 0, kn)$. Пусть, преломившись на второй (выходной) поверхности элемента, луч распространяется в вакууме в направлении единичного вектора \mathbf{s} с декартовыми координатами (s_x, s_y, s_z) . Тогда его волновой вектор равен $\mathbf{k}_2 = ks$, а его координаты находятся из закона преломления

$$\mathbf{k}_1 \times \mathbf{N} = \mathbf{k}_2 \times \mathbf{N}, \quad (3.3)$$

где \mathbf{N} — вектор, задающий направление нормали к выходной поверхности элемента, который имеет декартовы составляющие $(-\partial h/\partial x, -\partial h/\partial y, 1)$.

Из (3.3) получим уравнение для вектора \mathbf{s} :

$$\begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ -\frac{\partial h}{\partial x} & -\frac{\partial h}{\partial y} & 1 \\ 0 & 0 & kn \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ -\frac{\partial h}{\partial x} & -\frac{\partial h}{\partial y} & 1 \\ ks_x & ks_y & ks_z \end{vmatrix}, \quad (3.4)$$

где \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y , \mathbf{e}_z — орты трехмерного пространства. Из (3.4) следует система уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial x}n = \frac{\partial h}{\partial x}s_z + s_x, \\ \frac{\partial h}{\partial y}n = \frac{\partial h}{\partial y}s_z + s_y, \\ \frac{\partial h}{\partial x}s_y = \frac{\partial h}{\partial y}s_x, \end{cases} \quad (3.5)$$

которая является линейно зависимой. С помощью третьего уравнения и с учетом того, что $|\mathbf{s}| = 1$, выразим $(\partial h/\partial x)^2 s_z^2$ через s_x . Также выразим $(\partial h/\partial x)^2 s_z^2$ через s_x с помощью первого уравнения. Тогда получим:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 s_z^2 = \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 - \left[\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2\right] s_x^2, \\ \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 s_z^2 = \left(\frac{\partial h}{\partial x}n - s_x\right)^2. \end{cases} \quad (3.6)$$

Приравняв правые части, решив полученное квадратное уравнение относительно s_x и аналогичное уравнение для s_y , найдем координаты вектора \mathbf{s} :

$$\begin{cases} s_{x,y} = \frac{\nabla_{\perp} h}{1 + (\nabla_{\perp} h)^2} \left[n - \sqrt{1 - (n^2 - 1)(\nabla_{\perp} h)^2} \right], \\ s_z = \sqrt{1 - s_x^2 - s_y^2}, \end{cases} \quad (3.7)$$

где $\nabla_{\perp} h = (\partial h/\partial x, \partial h/\partial y)$, $(\nabla_{\perp} h)^2 = (\partial h/\partial x)^2 + (\partial h/\partial y)^2$. Знак «минус» перед корнем выбран потому что при $n = 1$ луч не должен изменить направление, а потому должно выполняться равенство $s_x = s_y = 0$. Случай, когда подкоренное выражение оказывается отрицательным, соответствует полному внутреннему отражению луча от выходной поверхности элемента. С помощью (3.7) можно получить декартовы координаты \mathbf{u} точки пересечения луча с произвольной плоскостью, поперечной оптической оси и отстоящей на расстоянии z от входной плоскости элемента:

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} + \frac{z - h(\mathbf{x})}{s_z} \begin{pmatrix} s_x \\ s_y \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Для СФП с микрорельефом (3.2) вектор нормали равен $\mathbf{N} = (\lambda \sin \varphi / (\pi r), -\lambda \cos \varphi / (\pi r), 1)$, где (r, φ) — полярные координаты в плоскости СФП. Тогда (3.7) примет вид:

$$\begin{cases} s_x = -\frac{\pi \lambda r \sin \varphi}{(\pi r)^2 + \lambda^2} \left[n - \sqrt{1 - (n^2 - 1) \left(\frac{\lambda}{\pi r}\right)^2} \right], \\ s_y = \frac{\pi \lambda r \cos \varphi}{(\pi r)^2 + \lambda^2} \left[n - \sqrt{1 - (n^2 - 1) \left(\frac{\lambda}{\pi r}\right)^2} \right], \\ s_z = \sqrt{1 - s_x^2 - s_y^2}. \end{cases} \quad (3.9)$$

Из (3.9) видно, что при прохождении через СФП чем луч ближе к оптической оси, тем сильнее он отклоняется, причем при $r < (\lambda/\pi)(n^2 - 1)^{1/2}$ возникает полное внутренне отражение от выходной поверхности. Из (3.9) также видно, что лучи, попадающие на левую ($\varphi = \pi$) и правую ($\varphi = 0$) области СФП, отклоняются соответственно вниз ($s_x = 0, s_y < 0$) или вверх ($s_x = 0, s_y > 0$), а лучи, попадающие на верхнюю ($\varphi = \pi/2$) и нижнюю ($\varphi = 3\pi/2$) области СФП, отклоняются соответственно влево ($s_x < 0, s_y = 0$) и вправо ($s_x > 0, s_y = 0$).

Если бы при $\varphi = 0$ не было скачка рельефа СФП, то все лучи освещающего кольцевого пучка света ($r = \text{const}, \varphi \in [0, 2\pi)$) отклонились бы на одинаковый угол. Но из-за наличия скачка освещающий кольцевой пучок теряет свою кольцевую форму и приобретает вид спирали. На рис. 3.2, а показана такая спираль, рассчитанная по формулам (3.8) и (3.9), для следующих параметров: длина волны $\lambda = 532$ нм, топологический заряд СФП $m = 1$, материал СФП — стекло $n = 1,5$, расстояние $z = 2,5\lambda$, расстояние падающих лучей от оптической оси

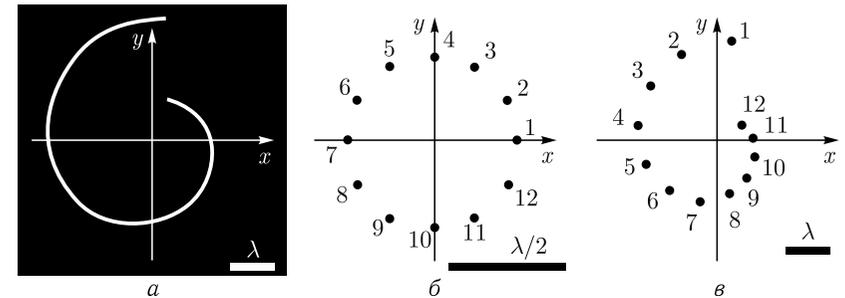


Рис. 3.2. Точки пересечения лучей, прошедших через СФП, с поперечной плоскостью на расстоянии $z = 2,5\lambda$ (а), распределение лучей в исходном (б) и в сформированном пучке (в)

$r = 0,35\lambda$. На рис. 3.2, б и 3.2, в показано соответствие лучей падающего кольцевого пучка и сформированной спирали.

3.1.2. Скалярная теория дифракции на рельефе СФП. Асимметрия, вызванная наличием микрорельефа, может быть объяснена и с помощью скалярной волновой теории света. Применим принцип Гюйгенса–Френеля. Рассмотрим два разных способа записи дифракционного интеграла. Первый способ состоит в расчете оптического пути лучей, которые параллельно оптической оси проходят через оптический элемент и которые начинаются на поперечной плоскости до элемента и заканчиваются на поперечной плоскости после элемента $z = z_{\max}$ (рис. 3.3, а). В этом случае принцип Гюйгенса–Френеля будет иметь вид:

$$E(\mathbf{u}) = \iint_{\Omega} E_0(\mathbf{x}) \exp[ik(n-1)h(\mathbf{x})] \frac{\exp(ikR)}{R} d\mathbf{x}, \quad (3.10)$$

где \mathbf{x} и \mathbf{u} — декартовы координаты в передней плоскости элемента и в плоскости наблюдения, Ω — область элемента, $E_0(\mathbf{x})$ — амплитуда освещающего излучения, $R = [|\mathbf{u} - \mathbf{x}|^2 + (z - z_{\max})^2]^{1/2}$. Второй способ состоит в расчете оптического пути лучей, которые параллельно оптической оси проходят через оптический элемент и которые начинаются на поперечной плоскости до элемента и заканчиваются на поверхности самого элемента (рис. 3.3, б). В этом случае вместо (3.10) дифракционный интеграл примет вид:

$$E(\mathbf{u}) = \iint_{\Omega} E_0(\mathbf{x}) \exp[iknh(\mathbf{x})] \frac{\exp(ikR')}{R'} d\mathbf{x}, \quad (3.11)$$

где $R' = \{|\mathbf{u} - \mathbf{x}|^2 + [z - h(\mathbf{x})]^2\}^{1/2}$.

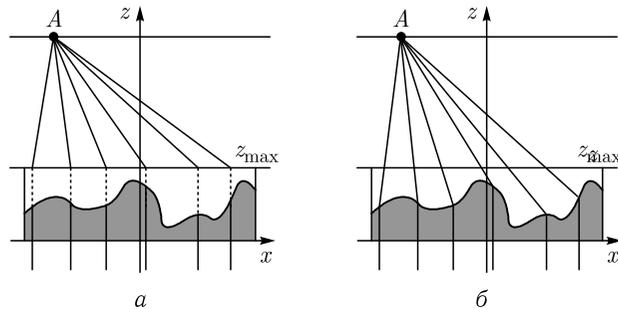


Рис. 3.3. Расчет поля в приближении тонкого элемента (а) и с учетом преломления на рельефе (б)

Для простоты анализа пусть СФП первого порядка освещается кольцевым пучком, т. е.

$$E_0(x, y) = \delta(\sqrt{x^2 + y^2} - r), \quad (3.12)$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака. Тогда, согласно (3.11), поле в поперечной плоскости будет иметь вид:

$$E(\rho, \theta, z) = \int_0^{2\pi} \exp(3i\varphi) \frac{\exp(ikR')}{R'} d\varphi, \quad (3.13)$$

где $R' = [\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\varphi - \theta) + (z - \lambda\varphi/\pi)^2]^{1/2}$.

Перепишем выражение для R' приближенно (при $z \ll (r_0, \rho)$):

$$R' \approx D + \frac{\left(\frac{\lambda\varphi}{\pi}\right)^2 - 2z\frac{\lambda\varphi}{\pi} - 2\rho r \cos(\varphi - \theta)}{2D}, \quad (3.14)$$

где $D = (\rho^2 + r^2 + z^2)^{1/2}$. С учетом (3.14), получим из (3.13):

$$E(\rho, \theta, z) = \frac{\exp(ikD)}{D} \int_0^{2\pi} \exp[iA\varphi + iB\varphi^2 - iC \cos(\varphi - \theta)] d\varphi, \quad (3.15)$$

где

$$\begin{cases} A = 3 - \frac{2z}{D}, \\ B = \frac{\lambda}{\pi D}, \\ C = \frac{k\rho r}{D}. \end{cases} \quad (3.16)$$

Если это поле имеет осевую симметрию, то его угловой момент равен нулю:

$$\int_0^{2\pi} E(\rho, \theta, z) d\theta = 0. \quad (3.17)$$

Подставив (3.15) в (3.17), получим:

$$\frac{\exp(ikD)}{D} 2\pi J_0(C) \int_0^{2\pi} \exp(iA\varphi + iB\varphi^2) d\varphi = 0. \quad (3.18)$$

Из (3.16) видно, что

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \infty} A &= 1, \\ \lim_{z \rightarrow \infty} B &= 0, \\ \lim_{z \rightarrow \infty} C &= 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Согласно (3.19) интеграл в (3.18) стремится к нулю при больших z . Но на малых расстояниях z (меньше нескольких длин Френеля), даже если пренебречь коэффициентом B в подынтегральном выражении, коэффициент A не равен целому числу, а потому центр тяжести оказывается смещенным от оптической оси, то есть интеграл (3.18) не равен нулю.

С использованием (3.10) и (3.11) были рассчитаны два поля, формирующихся при прохождении кольцевого пучка (3.12) с радиусом $r = 1,2\lambda$ через СФП первого порядка (рис. 3.1). Параметры расчета те же, что и на рис. 3.2. Интенсивность и фаза поля, рассчитанного по формуле (3.10), показаны на рис. 3.4, *a, б*, а по формуле (3.11) — на рис. 3.4, *в, г*. Из рис. 3.4 видно, что асимметрия возникает именно в случае учета ступеньки рельефа СФП. Видно также, что картина на рис. 3.4, *в* имеет вид незаконченной цифры 6, как и на рис. 3.2.

Рисунок 3.4, *в* был получен для кольцевого пучка. Если СФП осветить гауссовым пучком, то при использовании интегрального преобра-

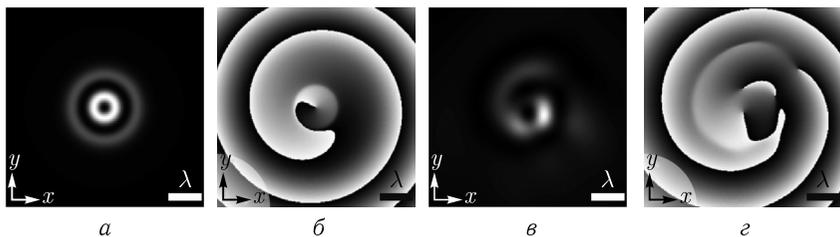


Рис. 3.4. Интенсивности (*a, в*) и фазы (*б, г*) светового поля, сформированного при прохождении кольцевого пучка через СФП и на расстоянии от нее $z = 2,5\lambda$, полученные в приближении тонкого элемента и преобразования (3.10) (*a, б*) и с учетом преломления лучей на микрорельефе (3.11) (*в, г*)

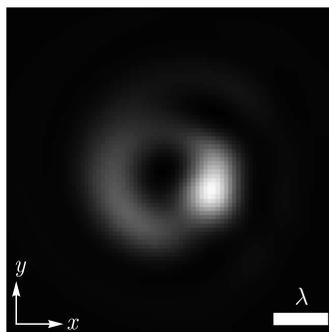


Рис. 3.5. Интенсивность светового поля, сформированного при прохождении гауссова пучка через СФП и на расстоянии от нее $z = 2,5\lambda$, рассчитанная с помощью преобразования (3.11)

зования (3.11) было получено распределение интенсивности, показанное на рис. 3.5. Для расчета использовался гауссов пучок с радиусом перетяжки $w = 2\lambda$. Из рис. 3.5 видно, что и в случае гауссова пучка нарушается симметрия дифракционной картины.

3.1.3. Строгое моделирование с помощью уравнений Максвелла. Полученная асимметричная картина дифракции подтверждается численным моделированием строгим конечно-разностным (finite-difference time-domain method, FDTD) методом. На рис. 3.6, *a, в* показаны усредненные по времени интенсивности в плоскостях, поперечных оптической оси и отстоящих от передней плоскости СФП соответственно на расстояния $z = 2,5\lambda$ и $z = 15\lambda$. Остальные параметры моделирования те же: $\lambda = 532$ нм, $n = 1,5$. В качестве освещающего излучения использовался линейно поляризованный гауссов пучок, сфокусированный на СФП диаметром 8λ и имеющий радиус перетяжки $w = 2\lambda$. Интенсивность получена методом FDTD с шагом по пространственным координатам $\lambda/16$ для $z = 2,5\lambda$ и $\lambda/10$ для $z = 15\lambda$, а по времени — соответственно $\lambda/(32c)$ и $\lambda/(20c)$, где c — скорость света в вакууме.

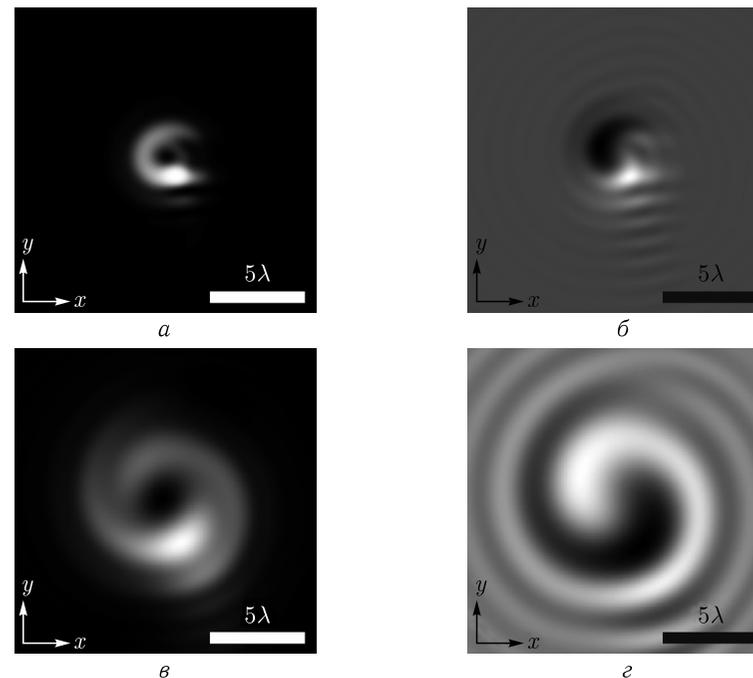


Рис. 3.6. Картина дифракции линейно поляризованного гауссова пучка на СФП (рис. 3.1), полученная с помощью метода FDTD: усредненная по времени интенсивность (*a, в*) и мгновенная составляющая E_x в момент времени $t = 20\lambda/c$ (*б, г*) в плоскостях $z = 2,5\lambda$ (*a, б*) и $z = 15\lambda$ (*в, г*)

Область моделирования: $|x| \leq 8\lambda$, $0 \leq z \leq 20\lambda$. Время моделирования: $20\lambda/c$. На рис. 3.6, б, г показаны амплитуды составляющей E_x в этих же плоскостях. Из рис. 3.6, г видно, что на расстоянии $z = 15\lambda$ фаза становится спиральной, как у стандартных оптических вихрей, а распределение интенсивности гораздо больше похоже на кольцевое (хотя асимметрия в виде цифры 6 сохраняется).

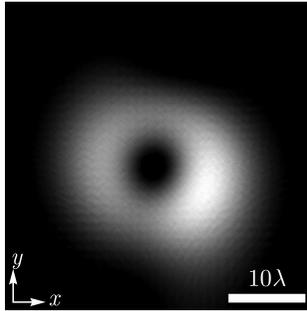


Рис. 3.7. Амплитуда гауссова пучка после прохождения через СФП на расстоянии $z = 50\lambda$, полученная с помощью метода ВРМ

Расчет картины дифракции на больших расстояниях FDTD-методом вычислительно трудоемок, поэтому в данной работе был использован менее точный, но более быстрый метод распространения пучка (ВРМ-метод). На рис. 3.7 показана амплитуда на расстоянии $z = 50\lambda$. Заметим, что длина Френеля в нашем случае равна $z_p = 4\pi\lambda$. Из рис. 3.7 видно, что асимметрия оптического вихря сохраняется на расстояниях от СФП, равных нескольким длинам Френеля.

3.1.4. Эксперимент. На рис. 3.8, а показано оптическое увеличенное изображение центральной части СФП на резисте с топологическим

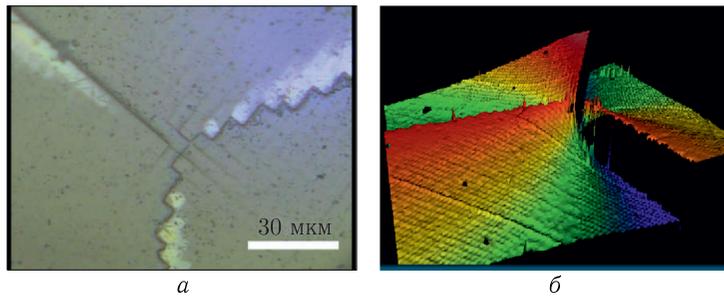


Рис. 3.8. Вид сверху центральной части (90×90 мкм) СФП с $m = 3$ для длины волны $\lambda = 633$ нм в оптическом микроскопе (а) и рельеф (в псевдоцветах) этого участка поверхности, полученный с помощью микроинтерферометра (б). Величина скачка рельефа (область черного) равна 2λ

зарядом $m = 3$, которая использовалась в эксперименте. На рис. 3.8, б показан профиль этого же участка рельефа СФП, которая была рассчитана для длины волны $\lambda = 633$ нм.

Спиральная пластинка (рис. 3.8) освещалась линейно поляризованным гауссовым пучком, и интенсивность прошедшего через нее излучения с длиной волны $\lambda = 633$ нм измерялась на разных расстояниях с помощью микроскопа ближнего поля с кантилевером, имеющим отверстие диаметром 100 нм. На рис. 3.9 показаны распределения интенсивности за СФП (рис. 3.8) на расстояниях $z = 100$ мкм (а) и $z = 300$ мкм (в). Для сравнения на рис. 3.9, б, г показаны интенсивности на соответствующих расстояниях, рассчитанные с помощью метода ВРМ. Из рис. 3.9 видно, во-первых, что экспериментальная картина интенсивности оптического вихря еще не успела обрести кольцевую форму и концентрация интенсивности имеет место вблизи линий скачков рельефа СФП (рис. 3.8), а, во-вторых, расчетные картины дифракции соответствуют экспериментальным данным.

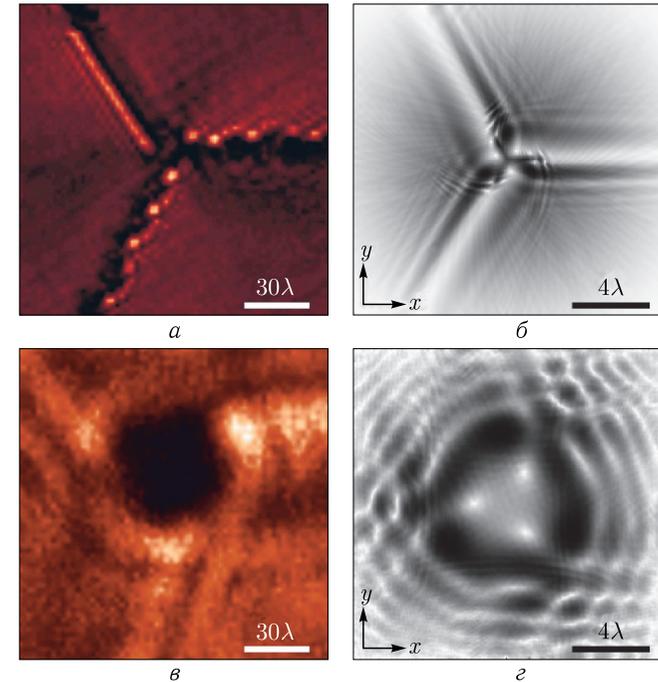


Рис. 3.9. Полученные с помощью микроскопа ближнего поля асимметричные оптические вихри (90×90 мкм), сформированные СФП (рис. 3.8) на расстоянии $z = 100$ мкм (а) и $z = 300$ мкм (в) и аналогичные картины дифракции, рассчитанные методом ВРМ (б, г)

На рис. 3.9, *a* можно видеть интересную особенность картины дифракции: возникновение локальных субволновых фокусов в местах, где линия скачка рельефа образует углы (ломаная линия на рис. 3.8, *a*). Такую локальную фокусировку света на вершинах элементов наноструктур называют «фотонными нано-струями».

В данном разделе тремя расчетными способами показана асимметрия светового вихревого пучка, сформированного спиральной рефракционной пластинкой со скачком рельефа поверхности. Получен дифракционный интеграл, описывающий принцип Гюйгенса-Френеля и учитывающий особенности рельефа рефракционного оптического элемента. С помощью этого интеграла рассчитана картина дифракции на СФП, которая имеет почти тот же вид, что и картина дифракции, полученная строгим FDTD-методом. Отсутствие в ближней зоне кольцевого распределения интенсивности у оптического вихря с топологическим зарядом 3, сформированного СФП с тремя скачками рельефа, доказано экспериментально с помощью микроскопа ближнего поля.

3.2. Вращение двухлепесткового оптического вихря в ближнем поле вихревого микроаксикона

Вращающиеся световые поля, у которых при распространении в свободном пространстве вращается вокруг оптической оси распределение интенсивности в поперечном сечении, нашли применение в микроскопии при измерении локализации и ориентации отдельных молекул [1], при зондировании атмосферы и в беспроводных системах связи [2], в передаче информации под водой [3], а также в датчиках магнитного поля [4].

Впервые вращающиеся оптические вихри — когерентные световые поля с сингулярной фазой, которые вращаются при распространении в свободном пространстве, рассмотрены в [5]. В [5] было получено условие для номеров линейной комбинации мод Лагерра-Гаусса (ЛГ), интенсивность которой как целое вращается при распространении. В [6] с помощью цифровой голограммы был сформирован вращающийся вихревой пучок, состоящий из суммы двух мод ЛГ с номерами (0,0) и (4,2), и имеющий распределение интенсивности в виде двух лепестков. В [6] экспериментально измерена угловая скорость вращения двухлепесткового пучка (ДЛП), которая оказалась непостоянной, и на линейном участке была равна 0,008 град/мкм. В [7] с помощью фазового дифракционного элемента были сформированы вращающиеся лазерные пучки, состоящие из двух мод Бесселя с топологическими зарядами -1 и -3 . Скорость вращения ДЛП составила 0,006 град/мкм. В [7] скорость вращения ДЛП, в отличие от [6], была постоянная. В [8] с помощью ДЛП точно (ошибка 1,6 %) измерена глубина резкости изображения. В [9] предложено с помощью пространственного модуля-

тора света формировать функцию рассеяния точки в виде двух лепестков, которые вращаются вокруг оптической оси при распространении в пространстве. С помощью оптимизационной процедуры был рассчитан фазовый элемент, эффективность которого при формировании ДЛП была равна 57 %, хотя в эксперименте была достигнута эффективность только 37 %. Сформированный ДЛП состоял из линейной комбинации многих мод ЛГ и сферической линзы с числовой апертурой $NA = 0,71$. При этом скорость вращения ДЛП вблизи фокуса в диапазоне от $-1,5$ мкм до $1,5$ мкм составляла 50 град/мкм. В [10] ДЛП, состоящий из двух пучков Бесселя, был сформирован с помощью жидкокристаллического модулятора. Скорость вращения была постоянная и равна 0,003 град/мкм. В [108] предлагается методика формирования пучков, интенсивность которых вращается вокруг оптической оси с ускорением. В частности с помощью модулятора сформирован ДЛП, состоящий из двух мод Бесселя с номерами 1 и 3, вращающийся со скоростью 0,0005 град/мкм. В [109] теоретически исследуются ДЛП с неоднородной поляризацией. В [110] с помощью многомодового оптического волокна сформированы ДЛП с различным состоянием поляризации. В [111, 112] с помощью жидкокристаллического модулятора света сформированы ДЛП, состоящие из нескольких мод ЛГ. Скорость вращения ДЛП нелинейная, но на линейном участке длиной около 10 мм она была равна 0,15 град/мкм. В этой работе исследуются как aberrации фокусирующей линзы влияют на вращение ДЛП.

В работах [1–4] ДЛП применяются для решения конкретных практических задач. Так в [1] предложена схема флуоресцентного микроскопа (глубина фокуса 2 мкм) с поперечным и продольным разрешением 250 нм и 500 нм, соответственно, и функцией рассеяния точки в виде вращающихся двух лепестков (скорость вращения около 50 град/мкм). Предложенная схема позволила определить положение и ориентацию отдельной молекулы с точностью 34 нм. В [2] показано относительно стабильное распространение ДЛП (длина волны 809 нм) на расстоянии 1,6 км в Ерлангене (Германия). Параметр Фрида турбулентности атмосферы был равен 20 мм. В [3] исследуется распространение оптического вихря (длина волны 450 нм) с несколькими лепестками в канале с турбулентной водой (коэффициент затухания $cz = 13$). Коэффициент корреляции пучка на выходе $r = 0,98$. В [4] вращающийся ДЛП пропускали через магнитооптический кристалл $Bi_4Ge_3O_{12}$, сам кристалл помещали в магнитное поле, которое приводило к изменению угла поворота ДЛП. Чувствительность этого метода определения магнитного поля равна 28 град/тесла.

Почти во всех перечисленных выше статьях ДЛП формируются с помощью пространственных модуляторов света. Но если не требуется изменять параметры пучка, то для формирования ДЛП более эффективно использовать дифракционный оптический микроэлемент. В данном разделе с помощью простого спирального микроаксикона

с топологическим зарядом $m = 2$ и числовой апертурой $NA = 0,60$ сформирован ДЛП (длина волны 532 нм), интенсивность которого вращается в ближней зоне на расстоянии от 1 мкм до 4 мкм со скоростью 55 град/мкм. Это скорость вращения ДЛП больше, чем во всех приведенных выше работах.

3.2.1. Теоретические основания. В [113] показано, что вращающиеся лазерные пучки можно сформировать с помощью любого известного в оптике вихревого модового базиса (моды Лагерра–Гаусса, Бесселя, Гипергеометрические моды, моды Бесселя–Гаусса и т. д.). Лазерный пучок будет вращаться, если он состоит из линейной комбинации специально подобранных мод. Причем скорость вращения для разных мод будет разная. Для вращающегося пучка, состоящего из линейной комбинации мод ЛГ, скорость изменения угла вращения равна [113]:

$$\varphi = -B \arctg(z/z_0), \quad (3.20)$$

где

$$B = \frac{2(n - n') + |m| - |m'|}{m - m'} = \text{const}, \quad (3.21)$$

φ — полярный угол в поперечной плоскости пучка, z — продольная координата, направленная вдоль оптической оси, $z_0 = kw^2/2$ — длина Рэлея, k — волновое число света, w — радиус перетяжки гауссова пучка, (n, m) номера моды ЛГ, которые определяют порядок многочлена Лагерра $L_n^{|m|}(x)$. В линейную комбинацию могут входить моды ЛГ, у которых номера (n, m) удовлетворяют условию (3.21). Из (3.20) видно, что на расстоянии $z = z_0$ пучок повернется на угол $B\pi/4$, и при больших z пучок повернется на $B\pi/2$. Кроме того, из (3.20) видно, что скорость вращения пучка на равномерная, а уменьшается с ростом z .

Аналогично можно сформировать парааксиальный вращающийся световой пучок, состоящий из мод Бесселя. Комплексная амплитуда такого пучка будет равна:

$$E(r, \varphi, z) = \sum_{n,m} C_{nm} J_m(k\alpha_n z) \exp(-ik\alpha_n^2 z/2 + im\varphi), \quad (3.22)$$

где C_{nm} — произвольные комплексные коэффициенты, $J_m(x)$ — функция Бесселя m -го порядка, α_n — коэффициент, определяющий масштаб функции Бесселя. Скорость вращения пучка с комплексной амплитудой (3.22) линейно зависит от z и равна:

$$\varphi = kB_1 z/2, \quad (3.23)$$

где

$$B_1 = \frac{\alpha_n^2 - \alpha_{n'}^2}{m - m'} = \text{const}. \quad (3.24)$$

Из сравнения (3.21) и (3.24) видно, что изменять скорость вращения пучка, состоящего из линейной комбинации мод ЛГ, можно

дискретным способом, изменяя номера мод (n, m) . Если вращающийся пучок состоит из суперпозиции мод Бесселя (3.22), то скорость вращения (3.23) можно менять непрерывно, изменяя масштабный коэффициент α_n . Другое преимущество мод Бесселя в том, что скорость вращения пучка линейно зависит от пройденного расстояния z . Поэтому измерительное устройство на основе мод Бесселя легче калибровать.

В [1] предложена схема определения продольных координат объекта с разрешением большим, чем дифракционный предел, с помощью изображающей оптической системы с вращающейся двухлепестковой функцией импульсного отклика. Идея заключается в следующем: если объектная точка смещается вдоль оптической оси, то ее изображение в виде двухлепестковой интенсивности будет вращаться вокруг оптической оси. Так как продольное разрешение идеальной оптической системы, определенное по полуспаду интенсивности, равно [114] ($DOF = \text{depth of focus}$)

$$DOF = \frac{\lambda}{2(NA)^2}, \quad (3.25)$$

а поперечное разрешение ($FWHM = \text{full width of half maximum}$) равно

$$FWHM = \frac{\lambda}{2(NA)}, \quad (3.26)$$

где λ — длина волны света, то измерять смещение двух лепестков интенсивности по окружности в поперечной плоскости эффективнее, чем измерять смещение интенсивности в изображении вдоль оптической оси, в число раз:

$$DOF/FWHM = 1/NA. \quad (3.27)$$

На практике точность метода ограничивается также шумом фотоприемника [1] и абберациями оптической системы [111]. Из (3.27) видно, что преодоление предела разрешения при измерении угла поворота ДЛП тем больше, чем меньше числовая апертура изображающей оптической системы. Для микроскопов с высокой числовой апертурой ($NA = 1$) данный метод не позволяет преодолеть продольный дифракционный предел.

В данном разделе мы с помощью дифракционного оптического изображающего микроэлемента (спирального аксикона [115] с топологическим зарядом $m = 2$), изготовленного по технологии электронной литографии и ионного травления в стекле с показателем преломления, близким к 1,5, сформировали ДЛП, который поворачивается на угол 240 градусов на расстоянии от нуля до 4,5 мкм от микроэлемента. Средняя скорость вращения ДЛП 55 град/мкм.

3.2.2. Моделирование. Винтовой (или вихревой) аксикон с топологическим зарядом $m = 1$ был рассмотрен в [115]. Для формирования ДЛП потребуется вихревой аксикон (ВА) с топологическим зарядом

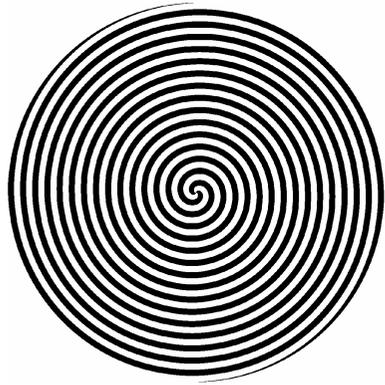


Рис. 3.10. Шаблон изготавливаемого ВА с топологическим зарядом $m = 2$

$m = 2$. На рис.3.10 показан бинарный шаблон для изготовления такого дифракционного ВА. Период кольцевой решетки (рис.3.10) равен $T_0 = 0,9$ мкм, радиус ВА $R = 15$ мкм. Микроаксикон имеет 15 периодов. Параметры моделирования: показатель преломления материала аксикона и подложки $n = 1,5$, длина волны $\lambda = 532$ нм. Числовая апертура ВА $NA = 0,56$. Падающая на аксикон волна плоская с круговой поляризацией. Высота рельефа $H = 0,47$ мкм. Область моделирования — $15 \times 15 \times 5,1$ мкм, шаг сетки — $\lambda/30$. Поперечные распределения интенсивности рассчитывались за аксиконом до 4 мкм. Расчет

прохождения света через ВА и далее проводился с помощью известного метода FDTD, реализованного в коммерческой программе Fullwave (фирмы RSoft).

На рис.3.11 показаны поперечные распределения интенсивности на некоторых плоскостях.

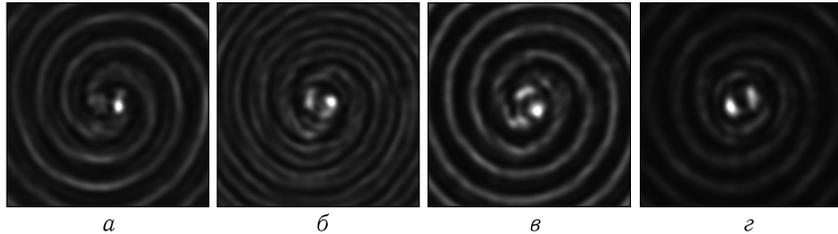


Рис. 3.11. Распределения интенсивности, рассчитанные на расстояниях от поверхности ВА: 1 мкм (а), 1,5 мкм (б), 2 мкм (в) и 4 мкм. Размеры кадров 15×15 мкм

Расстояние между лепестками приблизительно 0,8 мкм. Размеры каждого из лепестков на расстоянии 4 мкм (рис. 3.11, г) по полуспаду интенсивности равны: минимальный FWHM = 0,438 мкм ($0,824\lambda$) и максимальный FWHM = 0,57 мкм ($1,07\lambda$). Рассматриваемый аксикон работоспособен до расстояния 9 мкм. Это видно из рис. 3.12, на котором показана зависимость интенсивности вдоль оптической оси аналогичного аксикона, только с топологическим зарядом $m = 0$. Глубина фокусного пятна на рис. 3.12 составила $DOF = 5,96$ мкм по полуспаду интенсивности.

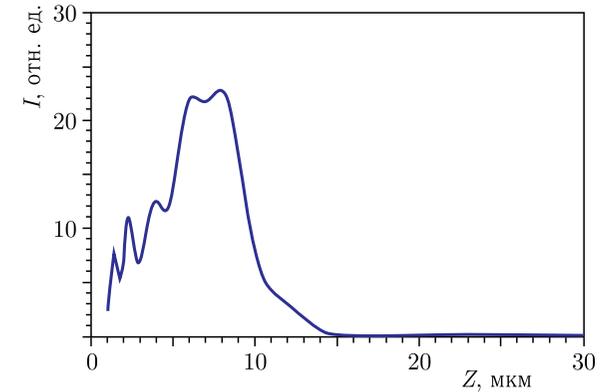


Рис. 3.12. Зависимость интенсивности на оси от расстояния z для аксикона с $m = 0$

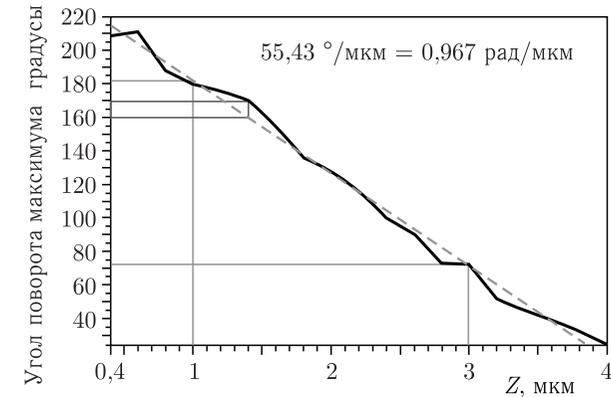


Рис. 3.13. Скорость вращения ДЛП в диапазоне z от 0,4 мкм до 4 мкм: сплошная линия — результаты расчета с шагом по оси $z = 0,2$ мкм, а пунктирная прямая получена путем усреднения наклона линейных участков ломанной сплошной кривой

На рис.3.13 приведена зависимость угла поворота лепестков на рис. 3.12 от расстояния по оси z .

Из графика на рис. 3.13 видно, что максимальное отклонение одной точки данных от усредненной линии составляет не более $\delta = 10^\circ$. Средняя скорость вращения максимумов ДЛП равна 55,43 град/мкм. Теоретическая скорость вращения, полученная на основе (3.23) равна:

$$\frac{\varphi}{z} = \frac{k\alpha^2}{2m}. \quad (3.28)$$

Для аксикона параметр $\alpha = \sin \theta = \lambda/T$. В моделировании и эксперименте следующие параметры: $\lambda = 532$ нм, $m = 2$, $T = 0,95$ мкм. Поэтому скорость вращения согласно (3.28) равна 53 град/мкм. Это значение хорошо согласуется со скоростью (55,43 град/мкм), полученной при строгом моделировании векторной дифракции лазерного пучка на ВА.

3.2.3. Изготовление вихревого аксикона. С помощью шаблона (рис. 3.10) микроаксикон изготавливался по технологии электронной литографии и ионного травления.

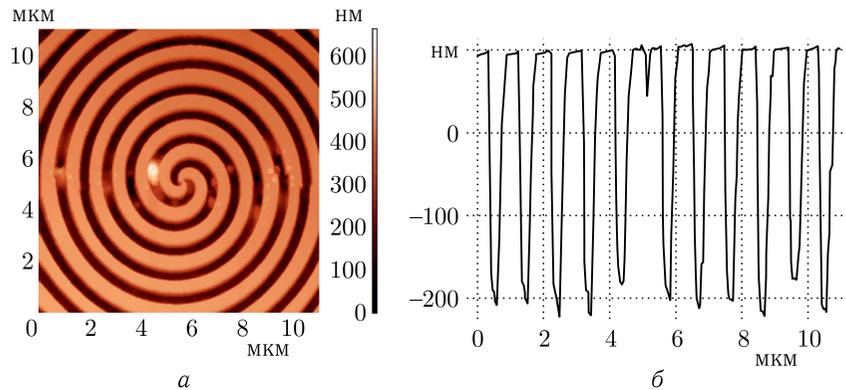


Рис. 3.14. Рельеф изготовленного ВА с $m = 2$ (а) и его сечение вдоль оси y (б), измеренные на атомно-силовом микроскопе

На рис. 3.14 показан рельеф центральной части ВА, измеренный на атомно-силовом микроскопе. Из рис. 3.14, б видно, что период аксикона равен $T = 0,95$ мкм, высота рельефа $H = 300$ нм. Далее с помощью сканирующего ближнепольного микроскопа измерялось прохождение света с круговой поляризацией и длиной волны $\lambda = 532$ нм через ВА с топологическим зарядом $m = 2$. Круговая поляризация получалась из линейной после прохождения четвертьволновой пластинки. Поворотом четвертьволновой пластинки обеспечивалась смена направления поляризации с левой на правую. На рис. 3.15 приведены поперечные распределения интенсивности, измеренные с помощью сканирующего оптического ближнепольного микроскопа на расстояниях от вихревого аксикона 1 мкм (а), 1,5 мкм (б) и 2 мкм (в).

Из рис. 3.15 видно, что за 1 мкм пучок повернулся почти на 90 градусов. Отличие в распределении интенсивности ДЛП с правой и левой круговой поляризацией незначительное. На рис. 3.16 показаны сечения интенсивности ДЛП на одном и том же расстоянии от поверхности ВА.

По данным измерения интенсивности ДЛП на разных расстояниях получен график зависимости угла поворота ДЛП от расстояния z

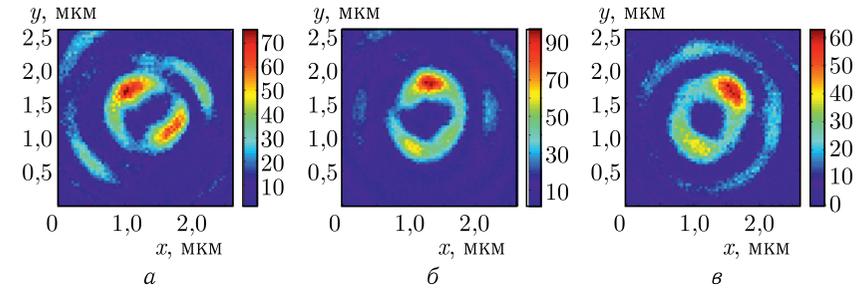


Рис. 3.15. Распределение интенсивности на расстоянии до поверхности ВА 1 мкм (а), 1,5 мкм (б) и 2 мкм (в) для пучка с правой круговой поляризацией

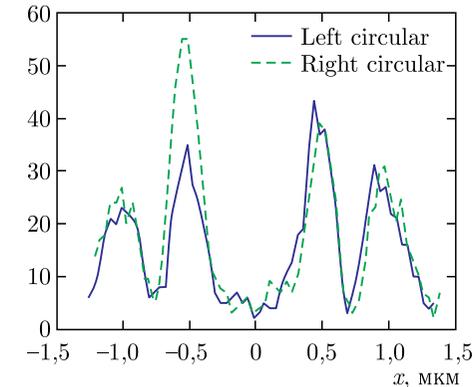


Рис. 3.16. Сечение интенсивности вдоль оси x для левой (синяя кривая) и правой (зеленая пунктирная кривая) круговой поляризации на расстоянии 1 мкм от ВА

(рис. 3.17). Моделирование методом FDTD показывает линейный рост угла поворота, в то время как эксперимент демонстрирует нелинейное изменение. Из рис. 3.17 видно, что скорость вращения не совсем линейная и хорошо совпадает с расчетом (55 град/мкм) только в диапазоне расстояний z от 1,5 мкм до 3 мкм. До расстояния $z = 1,5$ мкм скорость вращения (66 град/мкм) больше, чем рассчитанная (рис. 3.13), а после расстояния $z = 3$ мкм скорость вращения меньше (34 град/мкм), чем рассчитанная.

В этом разделе теоретически, численно и экспериментально показана возможность с помощью простого и хорошо известного компонента микрооптики (вихревого аксикона) с невысокой числовой апертурой (0,6) формировать вращающиеся двухлепестковые лазерные пучки быстро вращающиеся (55 град/мкм) на некотором расстоянии (от 0,5 мкм до 4,5 мкм) вблизи аксикона. По измерению поворотов лепестков интенсивности в поперечной плоскости можно определить

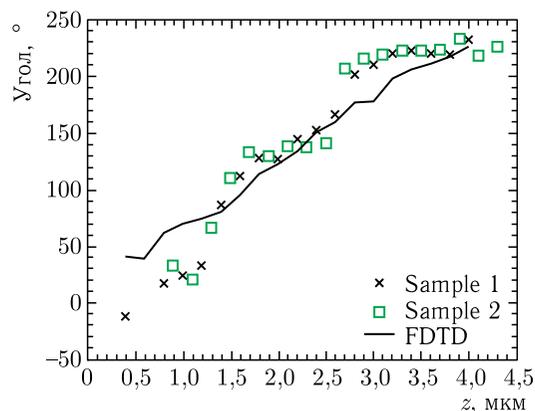


Рис. 3.17. Зависимость угла поворота максимумов ДЛП от расстояния до поверхности ВА. Кривая — моделирование методом FDTD, маркеры — измерения для двух разных образцов вихревых аксиконов

продольное смещение исследуемого объекта с преодолением продольного дифракционного предела. И чем меньше числовая апертура оптического элемента, формирующего двухлепестковый вращающийся пучок, тем эффективнее применение данного метода. Изготовленный вихревой аксикон может быть использован в микроскопии при измерении локализации и ориентации отдельных молекул, при зондировании атмосферы и в беспроводных системах связи, в передаче информации под водой, а также в датчиках магнитного поля.

Глава 4

ВРАЩАЮЩИЕСЯ АСИММЕТРИЧНЫЕ ЛАЗЕРНЫЕ ПУЧКИ

4.1. Вращающийся асимметричный пучок Бесселя–Гаусса

В 1987 году Гори [58] рассмотрел пучки Бесселя–Гаусса (БГ-пучки). Комплексная амплитуда таких пучков описывается произведением гауссовой функции на функцию Бесселя первого рода n -го порядка и на фазовую функцию, описывающую угловую гармонику. Комплексная амплитуда БГ-пучка удовлетворяет параксиальному уравнению распространения. Эти пучки имеют радиально-симметричное распределение интенсивности и обладают орбитальным угловым моментом (ОУМ). Радиальная симметрия сохраняется при распространении пучка. Но БГ-пучки не являются модами свободного пространства, так как при распространении не только масштабно изменяются, но также перераспределяется световая энергия между различными кольцами в распределении интенсивности в поперечном сечении пучка. БГ-пучки обобщались в ряде работ [52, 116, 117]. Например, в [52] рассмотрены пучки Гельмгольца–Гаусса, частным случаем которых являются пучки Бесселя–Гаусса [58]. БГ-пучки имеют конечную энергию, но известны также моды Бесселя, не обладающие конечной энергией [56]. Моды Бесселя являются решением уравнения Гельмгольца [34] и при распространении в однородном пространстве сохраняют свою интенсивность, и поэтому также называются бездифракционными пучками Бесселя [56]. Линейная комбинация мод Бесселя с произвольными коэффициентами также является решением уравнения Гельмгольца. В [17] предложен алгоритм расчета фазового оптического элемента, который формирует бездифракционные пучки Бесселя с заданным модовым составом. В [118] предложено рассматривать пучок Матье как альтернативу пучку Бесселя. В [119] показано, что линейная комбинация четного и нечетного пучков Матье с комплексными коэффициентами обладает ОУМ. Но сами пучки Матье не обладают ОУМ. Интересно [120], что линейная комбинация, двух мод Эрмита–Гаусса с комплексными коэффициентами, которые не обладают ОУМ, обладает ОУМ.

Периодические функции Матье можно разложить в ряд Фурье [34]. Например, четные функции Матье раскладываются по косинусам от полярного угла в цилиндрической системе координат, а нечетные — по синусам. Поэтому бездифракционный пучок Матье можно представить как линейную комбинацию мод Бесселя. Такие пучки рассматривались в [121].

Интересно найти линейные комбинации БГ-пучков, которые бы описывались простыми аналитическими функциями, с помощью которых можно было бы аналитически рассчитать некоторые свойства таких пучков. В данной работе рассматривается линейная комбинация БГ-пучков, которая описывается функцией Бесселя с комплексным аргументом. Показано, что такой асимметричный пучок Бесселя–Гаусса (аБГ-пучок) имеет в начальной плоскости счетное число изолированных нулей интенсивности, расположенных на горизонтальной оси. Все эти нули (кроме осевого) порождают оптические вихри с единичным топологическим зарядом и противоположными знаками с разных сторон от начала координат. Ноль интенсивности на оптической оси порождает оптический вихрь с топологическим зарядом n . При распространении в свободном пространстве аБГ-пучки вращаются вокруг оптической оси. Показано, что такие пучки имеют ОУМ, который растет с номером n , а также увеличивается с ростом параметра c асимметрии пучка. Причем ОУМ аБГ-пучков может быть как целым, так и дробным.

4.1.1. Линейная комбинация БГ-пучков. Запишем комплексную амплитуду пучка Бесселя–Гаусса (БГ-пучки) [58] в начальной плоскости $z=0$:

$$E_n(r, \varphi, z=0) = \exp\left(-\frac{r^2}{\omega_0^2} + in\varphi\right) J_n(\alpha r), \quad (4.1)$$

где $\alpha = k \sin \theta_0 = (2\pi/\lambda) \sin \theta_0$ — масштабирующий множитель, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число света с длиной волны λ , θ_0 — угол конической волны, формирующей пучок Бесселя. В любой другой плоскости z комплексная амплитуда (4.1) будет иметь вид:

$$E_n(r, \varphi, z) = q^{-1}(z) \exp\left(ikz - \frac{i\alpha^2 z}{2kq(z)}\right) \exp\left(-\frac{r^2}{\omega_0^2 q(z)} + in\varphi\right) J_n\left[\frac{\alpha r}{q(z)}\right], \quad (4.2)$$

где $q(z) = 1 + iz/z_0$, $z_0 = k\omega_0^2/2$ — длина Рэлея, ω_0 — радиус перетяжки гауссова пучка, $J_n(x)$ — функция Бесселя первого рода n -го порядка. Пучки (4.2) не являются параксиальными модами свободного простран-

ства, так как аргумент функции Бесселя комплексный. Рассмотрим следующую суперпозицию БГ-пучков $q = q(z)$:

$$E_n(r, \varphi, z; c) = q^{-1} \exp\left(ikz - \frac{i\alpha^2 z}{2kq} - \frac{r^2}{q\omega_0^2}\right) \times \sum_{p=0}^{\infty} \frac{c^p \exp(in\varphi + ip\varphi)}{p!} J_{n+p}\left(\frac{\alpha r}{q}\right). \quad (4.3)$$

Поле (4.3) формирует параксиальный асимметричный пучок Бесселя–Гаусса при любых целых n и любой комплексной постоянной c . Но для простоты в дальнейшем будем считать постоянную c вещественной положительной величиной: $c \geq 0$. Хотя, если рассмотреть c как комплексную величину $c = |c| \arg c$ или учесть, что она может быть отрицательной $c < 0$, то распределение интенсивности поля (4.3) повернется на угол $\arg c$ вокруг оптической оси. При $c = 0$ в (4.3) отличным от нуля остается только одно слагаемое при $p = 0$, и аБГ-пучок становится обычным БГ-пучком (4.1), (4.2).

Здесь рассматривается линейная комбинация БГ-пучков в виде (4.3) потому, что этот ряд равен функции Бесселя с комплексным аргументом. Действительно, в [103] есть справочный ряд (выражение 5.7.6.1):

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} J_{k+v}(x) = x^{v/2} (x-2t)^{-v/2} J_v(\sqrt{x^2-2tx}). \quad (4.4)$$

С помощью (4.4) преобразуем (4.3) и получим

$$E_n(r, \varphi, z; c) = \frac{1}{q} \exp\left(ikz - \frac{i\alpha^2 z}{2kq} - \frac{r^2}{q\omega_0^2} + in\varphi\right) \times \left[\frac{\alpha r}{\alpha r - 2cq \exp(i\varphi)}\right]^{n/2} J_n\left\{q^{-1} \sqrt{\alpha r [\alpha r - 2cq \exp(i\varphi)]}\right\}. \quad (4.5)$$

Выражение (4.5) является замкнутой формой для комплексной амплитуды трехпараметрического семейства параксиальных скалярных аБГ-пучков. Два непрерывных вещественных параметра аБГ-пучков управляют масштабом (α) и степенью асимметрии (c). Радиус гауссова пучка ω_0 считается одинаковым для всего семейства аБГ-пучков. Целый параметр n вместе с непрерывным c определяют величину ОУМ. Когда знаменатель в (4.5) равен нулю, тогда и аргумент функции Бесселя равен нулю. Неопределенность ноль на ноль раскрывается.

Пучок (4.5) имеет счетное число изолированных нулей интенсивности, которые порождают оптические вихри с единичным топологическим зарядом, кроме осевого нуля, который порождает оптический вихрь с n -ым топологическим зарядом. Для получения полярных координат нулей аБГ-пучка приравняем аргумент функции Бесселя в (4.5) корню функции Бесселя $\gamma_{np}(J_n(\gamma_{np}) = 0)$:

$$\alpha^2 r^2 - 2\alpha c q r \exp(i\varphi) = \gamma_{np}^2 q^2. \quad (4.6)$$

Выделим вещественную и мнимую части этого уравнения:

$$\begin{cases} \alpha^2 r^2 - 2\alpha c |q| r \cos(\varphi + \Psi) = \gamma_{np}^2 |q|^2 \cos(2\Psi), \\ -2\alpha c |q| r \sin(\varphi + \Psi) = \gamma_{np}^2 |q|^2 \sin(2\Psi), \end{cases} \quad (4.7)$$

где $\Psi = \arctg(z/z_0)$ — фаза Гоу. Из (4.7) находятся координаты точек с нулевой интенсивностью:

$$\begin{cases} \varphi_{np} = \frac{1}{2} \arccos \left[\cos(2\Psi) - \frac{\gamma_{np}^2}{2c^2} \sin^2(2\Psi) \right], \\ r_{np} = \frac{|q|}{\alpha} \sqrt{\gamma_{np}^2 \cos(2\Psi) + 2c^2 \pm 2\sqrt{D}}, \end{cases} \quad (4.8)$$

где $D = (c^2 - \gamma_{np}^2 \sin^2 \Psi)(c^2 + \gamma_{np}^2 \cos^2 \Psi)$. Из обоих уравнений (4.8) следует, что для того, чтобы координаты нулей были вещественными, необходимо выполнение следующего условия:

$$\gamma_{np} \sin \Psi \leq c. \quad (4.9)$$

Из (4.9) следует, что если $c > \gamma_{np}$, то все нули интенсивности с номерами от 0 до p при распространении не исчезают, однако остальные нули с номерами $q = p + 1, p + 2, \dots$ ($c \leq \gamma_{nq}$) пропадают на некотором расстоянии $z = cz_0/(y_{nq}^2 - c^2)^{1/2}$.

При $z = 0$ вместо (4.8) запишем:

$$\begin{cases} r_{p+} = \alpha^{-1} \sqrt{c + \sqrt{c^2 + \gamma_{np}^2}}, & \varphi_{np} = 2p\pi, \\ r_{p-} = \alpha^{-1} \sqrt{\sqrt{c^2 + \gamma_{np}^2} - c}, & \varphi_{np} = (2p + 1)\pi. \end{cases} \quad (4.10)$$

Из (4.10) следует, что интенсивность в сечении аБГ-пучка несимметрична относительно начала координат, так как $r_{p+} > r_{p-}$. Причем, когда $c > 0$ растет, асимметрия аБГ-пучка увеличивается, а при $c = 0$ изолированные нули аБГ-пучка пропадают, а появляются кольца нулевой интенсивности радиально-симметричного пучка Бесселя–Гаусса. Все нули аБГ-пучка (кроме осевого при $r = 0$) порождают оптические вихри с единичным топологическим зарядом и противоположными знаками с разных сторон от начала координат. Для нулей интенсивности с радиальными координатами r_{p+} топологический заряд оптических вихрей $+1$, для r_{p-} — топологический заряд -1 . Чтобы сменить знаки этих оптических вихрей на противоположные, надо вместо (4.5) взять комплексно сопряженное выражение. Из (4.8) видно, что нули интенсивности, а значит и само распределение интенсивности в поперечной плоскости аБГ-пучка, вращаются при распространении. Но вращение это достаточно сложное. Только когда $c \gg 1$, в первом уравнении в (4.8) можно пренебречь вторым слагаемым в квадратных скобках,

и тогда картина интенсивности в поперечном сечении пучка вращается как единое целое. При этом полярный угол меняется с расстоянием z :

$$\varphi = \arctg \left(\frac{z}{z_0} \right). \quad (4.11)$$

Из (4.11) следует, что аБГ-пучок от начальной плоскости $z = 0$ до расстояния Рэлея $z = z_0$ повернется против часовой стрелки на $\pi/4$, а на остальном участке пути от $z = z_0$ до $z = \infty$ еще на $\pi/4$, и, таким образом, на всем протяжении пути пучок повернется на $\pi/2$. Вращение аБГ-пучка не зависит от номера n , т.е. вращаться будет и нулевой пучок при $n = 0$.

На рис. 4.1 показаны распределение интенсивности и фазы аБГ-пучка (4.5) при разных значениях параметра асимметрии c . При моделировании были использованы следующие значения параметров: длина волны $\lambda = 532$ нм, радиус перетяжки гауссова пучка $w_0 = 10\lambda$, масштабирующий множитель $\alpha = 1/(10\lambda)$, границы расчетной области $-40\lambda \leq x, y \leq 40\lambda$. На рис. 4.1 видно, что с ростом $c > 0$ интенсивность из кольцевой становится похожей на полумесяц, выпуклый в правую сторону. Можно записать выражение для аБГ-пучка, имеющего вид полумесяца, выпуклого в левую сторону. Если аБГ-пучок имеет распределение интенсивности, зеркально-симметричное относительно оси $x = 0$ по сравнению с пучком (4.5), то его амплитуда равна

$$\begin{aligned} E_n(r, \varphi, z = 0; c) &= \\ &= \exp \left(-\frac{r^2}{\omega_0^2} \right) \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-c)^p \exp[i(n+p)\varphi]}{p!} J_{n+p}(ar) = \\ &= \exp \left(-\frac{r^2}{\omega_0^2} \right) \left[\frac{ar}{ar + 2c \exp(i\varphi)} \right]^{n/2} \times \\ &\quad \times J_n \left\{ \sqrt{ar [ar + 2c \exp(i\varphi)]} \right\} \exp(in\varphi). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Также на рис. 4.1 видно, что нули интенсивности, лежащие на оси $x < 0$, с ростом c приближаются к центру координат: на рис. 4.1, б, г их еще не видно, а на рис. 4.1, е появился один ноль. Такое поведение нулей следует из второго уравнения (4.10) при больших $c \gg 1$. В центре рис. 4.1, б, г, е расположен ноль интенсивности третьего порядка ($n = 3$).

На рис. 4.2 показаны распределения интенсивности и фазы аБГ-пучка третьего порядка ($n = 3$) при относительно большом значении параметра $c = 10$ на разных расстояниях вдоль оптической оси в плоскостях $z = 0$ (а, б), $z = z_0$ (в, г), $z = 10z_0$ (д, е). На рис. 4.2 видно, что пучок вращается вокруг оптической оси. На расстоянии Рэлея z_0 картина интенсивности повернулась против часовой стрелки на 45 градусов

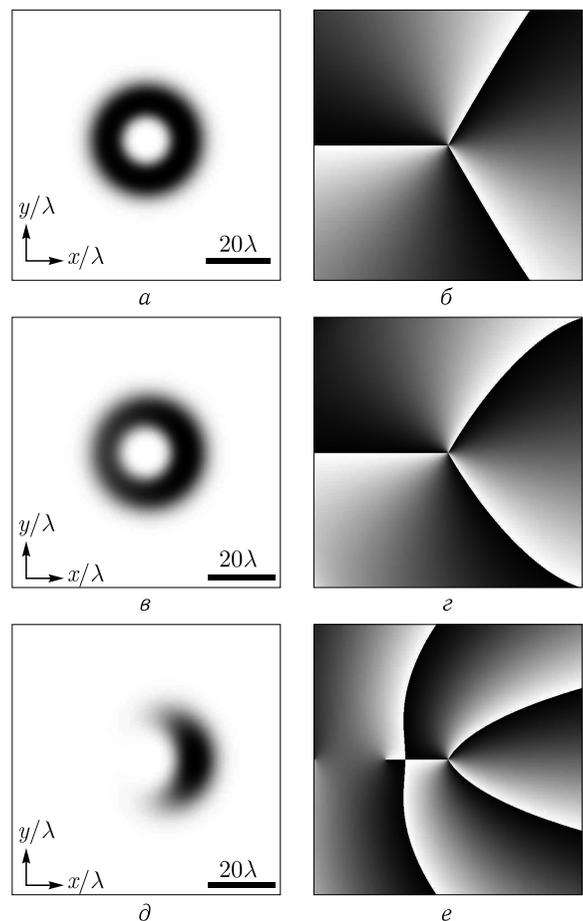


Рис. 4.1. Распределение интенсивности (негатив) (*a*, *в*, *д*) и фазы (*б*, *г*, *е*) светового пучка (4.5) третьего порядка ($n = 3$) в начальной плоскости при $z = 0$ для разных значений параметра асимметрии c : 0,1 (*a*, *б*); 1 (*в*, *г*); 10 (*д*, *е*)

(рис. 4.2, *в*), а на расстоянии $10z_0$ картина интенсивности повернулась почти на 90 градусов (рис. 4.2, *д*).

Размер картинок на рис. 4.2 разный: $-80\lambda \leq x, y \leq 80\lambda$ (*a*, *б*); $-100\lambda \leq x, y \leq 100\lambda$ (*в*, *г*) и $-500\lambda \leq x, y \leq 500\lambda$ (*д*, *е*). Остальные параметры те же, что и для рис. 4.1. На рис. 4.2 также видно, что нули интенсивности, лежащие на оси x при $z = 0$, тоже начинают вращаться против часовой стрелки с увеличением z . На рис. 4.2, *б* видны три изолированных нуля интенсивности на оси x слева от центрального нуля 3-го порядка. На рис. 4.2, *г* видно, что при $z = z_0$ осталось только два нуля, которые повернулись на 45 градусов, а на рис. 4.2, *е* $z = 10z_0$

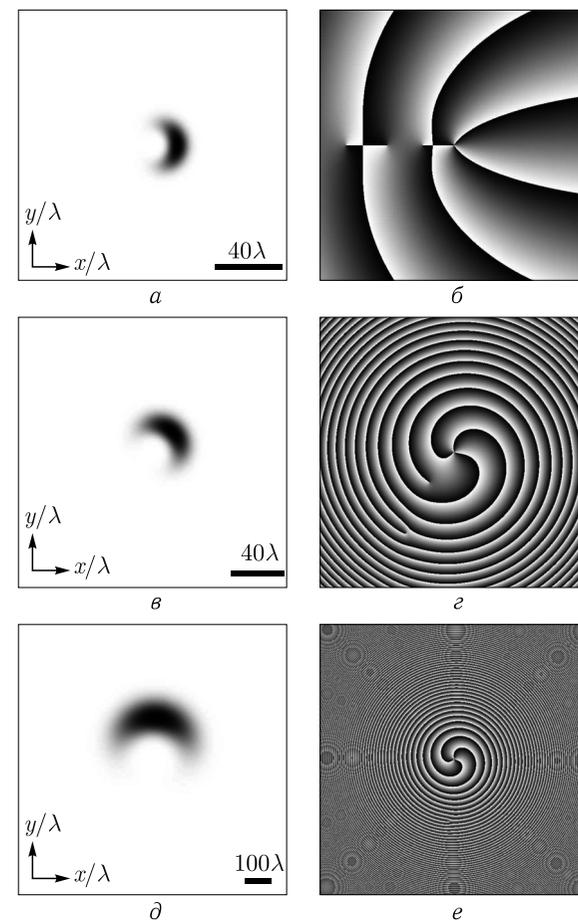


Рис. 4.2. Распределение интенсивности (негатив) (*a*, *в*, *д*) и фазы (*б*, *г*, *е*) светового пучка (4.5) третьего порядка ($n = 3$) на разных расстояниях: $z = 0$ (*a*, *б*), $z = z_0$ (*в*, *г*), $z = 10z_0$ (*д*, *е*)

эти два нуля объединились в один ноль 2-го порядка и повернулись почти на 90 градусов.

Из неравенства (4.9) следует, что при $c \leq 1$ все изолированные нули интенсивности, лежащие на оси x (кроме центрального нуля) будут «пропадать» по мере распространения пучка, начиная с самых дальних нулей ($\gamma_p \gg 1$). Последним «пропадет» первый ноль интенсивности γ_p при z , равном:

$$z = z_0 \operatorname{tg} \left[\arcsin \left(\frac{c}{\gamma_p} \right) \right]. \quad (4.13)$$

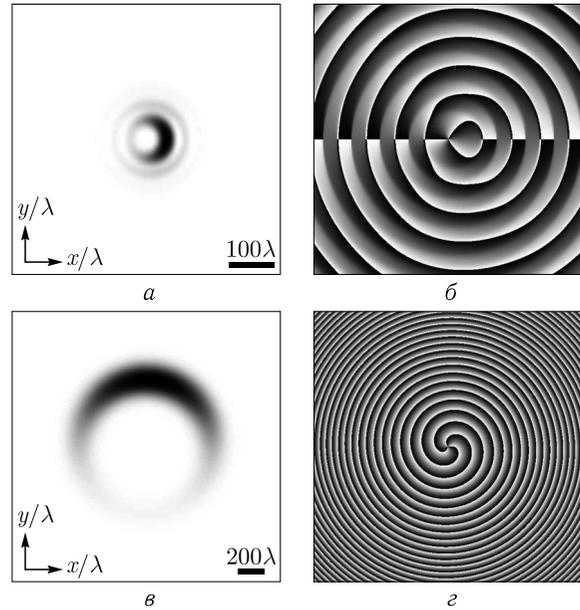


Рис. 4.3. Распределение интенсивности (негатив) (а, в) и фазы (б, г) аБГ-пучка третьего порядка ($n = 3$) при $c = 1$ на разных расстояниях $z: 0$ (а, б) и z_0 (в, г)

Нули интенсивности «пропадают» в том смысле, что значения их координат, согласно (4.8) и при условии (4.9), становятся комплексными, а не действительными.

На рис. 4.3 показаны распределения интенсивности и фазы аБГ-пучка при небольшом параметре асимметрии $c = 1$. Остальные параметры расчета: длина волны $\lambda = 532$ нм, радиус перетяжки гауссова пучка $w_0 = 100\lambda$, масштабирующий множитель $\alpha = 1/(10\lambda)$, границы расчетной области $-300\lambda \leq x, y \leq 300\lambda$ (рис. 4.3, а, б) и $-1000\lambda \leq x, y \leq 1000\lambda$ (рис. 4.3, в, г). При этих параметрах вращение аБГ-пучка уже не описывается простой формулой (4.11), так как параметр асимметрии c небольшой. На рис. 4.3 видно, что картина интенсивности поворачивается на расстоянии $z = z_0$ почти на 90 градусов против часовой стрелки. А изолированные нули интенсивности, которые лежат на оси x и видны на рис. 4.3, б, при распространении пучка «пропадают»: на рис. 4.3, г при $z = z_0$ не видно нулей интенсивности, кроме центрального.

На рис. 4.4 показаны интенсивность и фаза аБГ-пучка нулевого порядка при следующих параметрах: длина волны $\lambda = 532$ нм, радиус перетяжки гауссова пучка $w_0 = 10\lambda$, масштабирующий множитель $\alpha = 1/(10\lambda)$, параметр асимметрии $c = 10$, границы расчетной области $-40\lambda \leq x, y \leq 40\lambda$. В случае нулевого порядка аБГ-пучок (рис. 4.4)

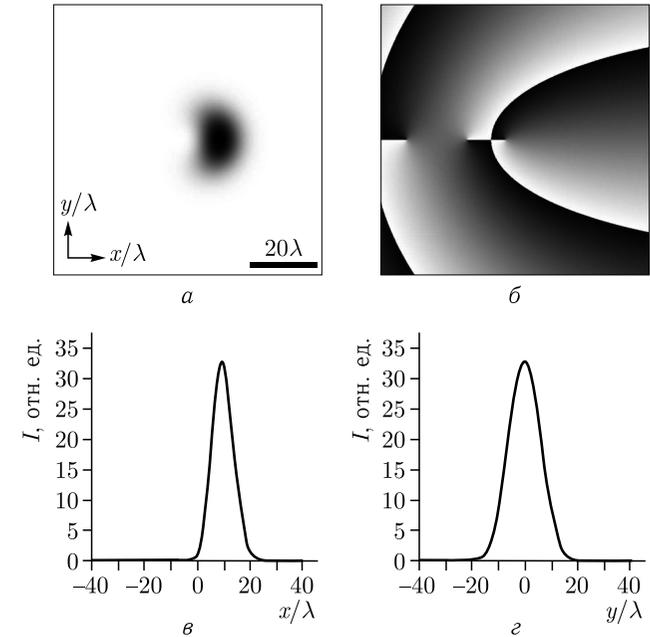


Рис. 4.4. Интенсивность (негатив) (а) и фаза (б) светового пучка (4.5) нулевого порядка ($n = 0$) в начальной плоскости, а также сечения интенсивности при $z = y = 0$ (в) и $z = x = 0$ (г)

обладает интересным свойством: имеет максимум интенсивности вблизи оптической оси и ОУМ, отличный от нуля. Это свойство можно использовать при манипулировании диэлектрическими микрочастицами. Частица, которая по размерам в несколько раз больше основного максимума интенсивности пучка на рис. 4.4, может удерживаться этим максимумом интенсивности и, одновременно, вращаться вокруг своей оси.

На рис. 4.4, в видно, что максимальное значение амплитуды аБГ-пучка нулевого порядка

$$E_0(r, \varphi, z = 0; c) = \exp\left(-\frac{r^2}{\omega_0^2}\right) J_0\left\{\sqrt{\alpha r [ar - 2c \exp(i\varphi)]}\right\}. \quad (4.14)$$

больше единицы и равно $I_{\max} = 32$. Этому есть объяснение. Так как при $\alpha r < 2c$ и $\varphi = 0$ аргумент (4.14) чисто мнимый, то на этом участке оси x аБГ-пучок нулевого порядка можно представить как

$$E_0(r = x, \varphi = 0) = \exp\left(-\frac{x^2}{\omega_0^2}\right) I_0\left\{\sqrt{\alpha x(2c - \alpha x)}\right\}, \quad (4.15)$$

где $I_0(x)$ — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка. На концах отрезка $[0, 2c/\alpha]$ аргумент функции (4.15) принимает зна-

чение ноль, а сама функция Бесселя равна $J_0(0) = I_0(0) = 1$. Поэтому при $x = 0$ амплитуда (4.15) равна 1, а при $x = 2c/\alpha$ равна $\exp(-4c^2/(\omega_0^2\alpha^2))$. На этом отрезке $[0, 2c/\alpha]$ функция $I_0(y)$ достигает максимума в точке, в которой аргумент достигает максимума. А аргумент достигает максимума в середине отрезка, т.е. при $x = c/\alpha$. В середине отрезка функция Бесселя равна $I_0(c)$. С другой стороны, гауссова экспонента в (4.15) убывает на этом отрезке от 1 до $x = w_0$. Поэтому максимум амплитуды (4.15) будет находиться в разных точках отрезка $[0, 2c/\alpha]$ в зависимости от того, что больше: w_0 или c/α . Если выполняется неравенство $c/\alpha < w_0$, то максимум (4.15) находится в точке $x = c/\alpha$ и равен $E_0(x = c/\alpha, \varphi = 0) = \exp[-c^2/(\omega_0^2\alpha^2)] I_0(c)$. Если наоборот, $c/\alpha > w_0$, то максимум (4.15) находится в точке $x = w_0$ и равен $E_0(x = w_0, \varphi = 0) = e^{-1} I_0(\sqrt{\alpha\omega_0}(2c - \alpha\omega_0))$. Для рис. 4.4 выполняется последнее неравенство, и поэтому максимум амплитуды равен $E_0(x = 10\lambda, \varphi = 0) = e^{-1} I_0(\sqrt{19}) \approx 5,67$. А максимальное значение интенсивности аБГ-пучка равно $I_{\max} = |E_0(r = 10\lambda, \varphi = 0)|^2 \approx 32,14$. На рис. 4.4, в, г также видно, что у аБГ-пучка нулевого порядка почти нет боковых лепестков.

4.1.2. Фурье-спектр аБГ-пучка. Угловой спектр обычного БГ-пучка известен [52]:

$$A_n(\rho, \varphi) = (-i)^n \exp\left[-\left(\frac{k\rho\omega_0}{2f}\right)^2\right] I_n\left(\frac{k\alpha\rho\omega_0^2}{2f}\right) \exp(in\varphi), \quad (4.16)$$

где $I_n(x)$ — модифицированная функция Бесселя n -го порядка, ρ — радиальная координата в Фурье-плоскости, f — фокусное расстояние сферической линзы, формирующей пространственный спектр БГ-пучка. Рассмотрим линейную комбинацию, аналогичную (4.3), но состоящую из функций (4.16), получим угловой спектр аБГ-пучка:

$$A_n(\rho, \varphi) = \exp\left[-\left(\frac{k\rho\omega_0}{2f}\right)^2\right] \times \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-ic)^p \exp[i(n+p)\varphi]}{p!} I_p\left(\frac{k\alpha\rho\omega_0^2}{2f}\right). \quad (4.17)$$

Используя справочное соотношение [103]

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} I_{k+v}(x) = x^{v/2} (x+2t)^{-v/2} I_v(\sqrt{x^2+2tx}), \quad (4.18)$$

получим окончательное выражение для Фурье-спектра аБГ-пучка:

$$A_n(\rho, \varphi) = \exp\left[-\left(\frac{k\rho\omega_0}{2f}\right)^2 + in\varphi\right] \left(\frac{\xi}{\xi + 2ce^{i(\varphi-\pi/2)}}\right)^{n/2} \times$$

$$\times I_p\left\{\sqrt{\xi[\xi + 2ce^{i(\varphi-\pi/2)}]}\right\}, \quad (4.19)$$

где $\xi = \alpha k \rho \omega_0^2 / (2f)$. Угловой спектр (4.19) асимметричный: при $\varphi = \pi/2$ и на кольце фиксированного радиуса $\rho = \rho_0$ модуль амплитуды (4.19) имеет максимум, а при $\varphi = -\pi/2$ — минимум. Вид углового спектра (4.19) похож на вид амплитуды аБГ-пучка (4.5) (с точностью до замены функции Бесселя модифицированной функцией Бесселя), но повернут на 90 градусов. Поэтому асимметрия спектра (4.19) будет похожа на асимметрию аБГ-пучка (4.5).

4.1.3. Орбитальный угловой момент аБГ-пучка. Орбитальный угловой момент J_z (проекция ОУМ на оптическую ось) и суммарная интенсивность I светового пучка в плоскости, поперечной оптической оси, определяются по формулам [34]:

$$J_z = \text{Im} \left\{ \iint_{\mathbb{R}^2} E^* \frac{\partial E}{\partial \varphi} r dr d\varphi \right\}, \quad (4.20)$$

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} E^* E r dr d\varphi. \quad (4.21)$$

Подставив в (4.20), (4.21) комплексную амплитуду (4.3) при $z = 0$, получим орбитальный угловой момент и суммарную интенсивность аБГ-пучка:

$$J_z = 2\pi \sum_{p=0}^{\infty} \frac{c^{2p}(n+p)}{(p!)^2} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{2r^2}{\omega_0^2}\right) J_{n+p}^2(\alpha r) r dr, \quad (4.22)$$

$$I = 2\pi \sum_{p=0}^{\infty} \frac{c^{2p}}{(p!)^2} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{2r^2}{\omega_0^2}\right) J_{n+p}^2(\alpha r) r dr. \quad (4.23)$$

Интегралы в этих выражениях описаны в [103]:

$$\int_0^{\infty} x \exp(-px^2) J_\nu(bx) J_\nu(cx) dx = (2p)^{-1} \exp\left(-\frac{b^2+c^2}{4p}\right) I_\nu\left(\frac{bc}{2p}\right). \quad (4.24)$$

Используя интеграл (4.24) и разделив (4.22) на (4.23), получим выражение для орбитального углового момента, нормированного на интенсивность:

$$\frac{J_z}{I} = n + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{c^{2p} p I_{n+p}(y)}{(p!)^2} \left[\sum_{p=0}^{\infty} \frac{c^{2p} I_{n+p}(y)}{(p!)^2} \right]^{-1}, \quad (4.25)$$

где $y = \alpha^2 \omega_0^2 / 4$. Выражение (4.25) дальше упростить не удастся. Из (4.25) следует, что ОУМ аБГ-пучков больше n , так как все слагаемые рядов в (4.25) положительные и числитель всегда больше знаменателя. То есть с ростом параметра c , растет асимметрия аБГ-пучка и почти линейно растет его ОУМ, как видно из рис. 4.5. Так как параметры α и c являются действительными положительными числами, то второе слагаемое в (4.25) может быть как целым, так и дробным положительным числом. Поэтому из (4.25) также следует, что аБГ-пучок нулевого порядка ($n = 0$) может иметь любой ОУМ. Заметим также, что в (4.25) масштабные параметры пучка Бесселя α и гауссова пучка ω_0 входят в виде произведения, поэтому у разных аБГ-пучков, у которых $\alpha \omega_0 = \text{const}$, ОУМ будет одинаковым (при равных n и c).

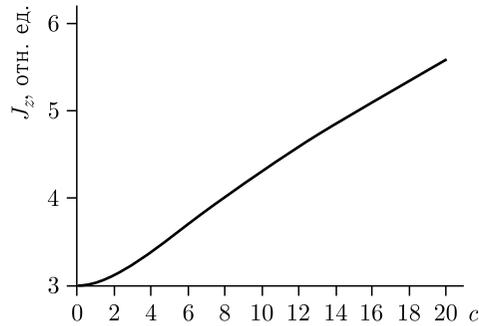


Рис. 4.5. Зависимость ОУМ от параметра асимметрии c при $n = 3$, $w_0 = 10\lambda$, $\alpha = 1/(10\lambda)$

4.1.4. Взаимная неортогональность функций, описывающих семейство аБГ-пучков. Подобно тому, как был вычислен орбитальный угловой момент, можно вычислить скалярное произведение комплексных амплитуд двух ЭБ-пучков — пучка n -го порядка с параметрами α и c и пучка m -го порядка с параметрами β и d :

$$(E_{nac}, E_{m\beta d}) = \frac{\pi \omega_0^2}{2} \left(\frac{d^*}{c} \right)^{\frac{n-m}{2}} \exp \left[-\frac{\omega_0^2}{8} (\alpha^2 + \beta^2) \right] \times$$

$$\times \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(cd^*)^{p + \frac{|n-m|}{2}}}{p! (p + |n-m|)!} I_{p + \max(m,n)} \left(\frac{\omega_0^2 \alpha \beta}{4} \right), \quad (4.26)$$

где I_ν — модифицированная функция Бесселя. Из выражения (4.26) видно, что в отличие от мод Бесселя [56], аБГ-пучки не ортогональны ни по масштабирующему множителю, ни по порядку функции Бесселя, ни по параметру асимметрии. В (4.26) параметры асимметрии c и d считались комплексными, d^* — комплексное сопряжение.

Заметим, что аБГ-пучки при стремлении радиуса гауссова пучка к бесконечности $w_0 \rightarrow \infty$ переходят в бездифракционные асимметричные элегантные моды Бесселя [122].

4.1.5. Эксперимент. Схема экспериментальной установки представлена на рис. 4.6. В эксперименте был использован фазовый пространственный модулятор PLUTO VIS. Свет твердотельного лазера с длиной волны $\lambda = 532$ нм расширяется коллиматором, ограничивается диафрагмой диаметром 8 мм. В результате получалось равномерное распределение интенсивности, которое можно считать плоской волной. Далее свет проходит через светоделительный кубик и попадает на пространственный модулятор света, отражается от него и отклоняется светоделительным кубиком на ПЗС-камеру. На полутоновой модулятор с компьютера передавалась фаза для формирования аБГ-пучка в комбинации с фазой параболической линзы с фокусным расстоянием 960 мм.

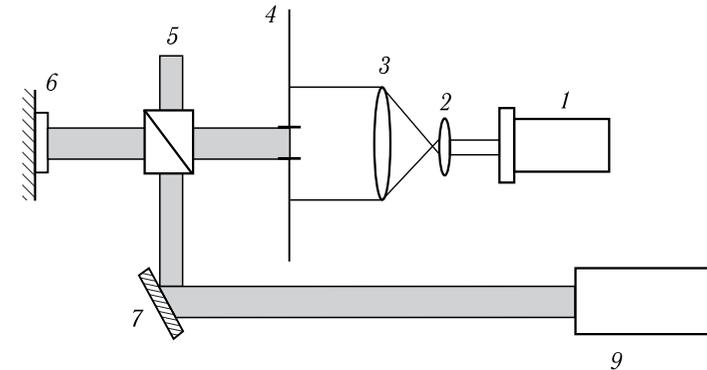


Рис. 4.6. Схема экспериментальной установки. 1 — твердотельный лазер с длиной волны 532 нм, 2, 3 — коллиматор, 4 — диафрагма, 5 — светоделительный кубик, 6 — модулятор PLUTO VIS, 7 — зеркало, 9 — ПЗС камера

ПЗС камера перемещалась на небольшом отрезке в непосредственной близости от фокуса. На рис. 4.7 показаны фазовое распределение (а), сформированные на модуляторе (без добавленной линзы) и распределения интенсивности, зарегистрированные ПЗС-матрицей

на расстоянии 850 мм (б), 900 мм (в) и 950 мм (г) от модулятора. Размерность модулятора составляет 1920×1080 пикселей, размер одного чувствительного элемента 8 мкм. Фаза, представленная на рис. 4.7, имела размерность 1024×1024 пикселей и формировалась в центре модулятора. Таким образом, размер сформированного фазового распределения составлял 8,2 мм.

На рис. 4.7 видно, что сформированный модулятором полумесяц не только вращается в сходящемся лазерном пучке (за 100 мм пути пучок повернулся почти на 90 градусов против часовой стрелки), но и искажается. Это искажением связано с тем, фазовое распределение (рис. 4.7, а) только частично учитывает амплитудное распределение аБГ-пучка (4.5).

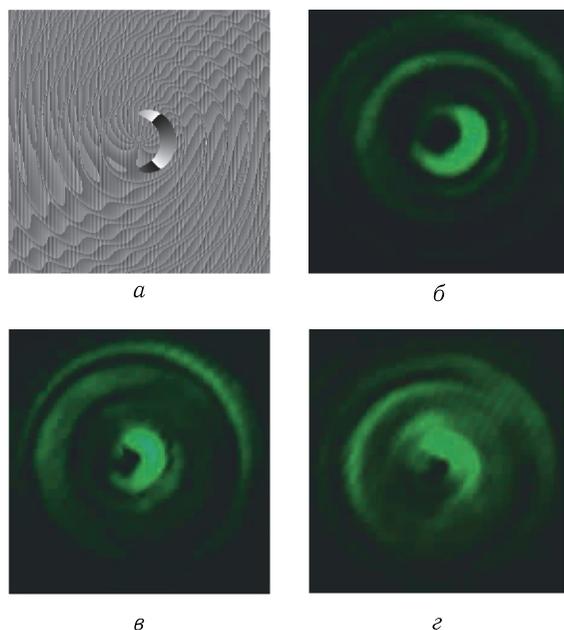


Рис. 4.7. Распределение фазы сформированной на модуляторе PLUTO VIS (а), и распределения интенсивности зарегистрированные на расстояниях от модулятора: 850 мм (б), 900 мм (в) и 950 мм (г)

Таким образом, нами получено новое решение параксиального уравнения Гельмгольца, описывающее трехпараметрическое семейство асимметричных пучков Бесселя–Гаусса (аБГ-пучков), обладающих конечной энергией и описывающихся функциями Бесселя первого рода целого порядка с комплексным аргументом; при $c = 0$ аБГ-пучки совпадают с обычными пучками Бесселя–Гаусса [58]. Распределение интенсивности аБГ-пучков имеет счетное число изолированных нулей,

лежащих на горизонтальной прямой в начальной плоскости ($z = y = 0$). В местах этих нулей расположены оптические вихри, имеющие единичные топологические заряды и разные знаки с разных сторон от оптической оси (от центра координат). Осевой ноль интенсивности имеет топологический заряд, равный порядку функции Бесселя.

При больших параметрах асимметрии $c \gg 1$ аБГ-пучки вращаются как единое целое при своем распространении в свободном пространстве: на расстоянии длины Рэлея они поворачиваются на 45 градусов, и еще на 45 градусов за весь остальной путь; при меньших $c \leq 1$ пучки вращаются более сложным образом: на определенном расстоянии от начальной плоскости оптические вихри (изолированные нули интенсивности), которые присутствовали в сечении пучка, пропадают (кроме центрального нуля интенсивности), и на расстоянии длины Рэлея пучок может повернуться почти на 90 градусов. аБГ-пучки имеют асимметричный угловой спектр, выражающийся через произведение гауссовой функции на модифицированную функцию Бесселя с комплексным аргументом; вид этого спектра имеет асимметрию, аналогичную асимметрии аБГ-пучка, но повернутую на 90 градусов. аБГ-пучки могут иметь целый и дробный ОУМ, который растет с ростом номера n и почти линейно с ростом параметра c ; пучок нулевого порядка имеет максимум интенсивности, смещенный с оптической оси на величину c/α и изолированные нули интенсивности, и может обладать любым ОУМ, в зависимости от выбора параметра асимметрии c . аБГ-пучки не ортогональны ни по одному из параметров n , α , c . Экспериментально с помощью жидкокристаллического модулятора света сформирован сходящийся лазерный пучок, похожий на аБГ-пучок с распределением интенсивности в виде полумесяца, который повернулся почти на 90 градусов против часовой стрелки.

4.2. Асимметричные вращающиеся пучки Лагерра–Гаусса

Моды Лагерра–Гаусса (ЛГ) составляют класс хорошо изученных параксиальных световых полей. Форма поперечного сечения интенсивности этих полей инвариантна к распространению в однородной среде и обладает радиальной симметрией. Моды ЛГ нашли применение в таких областях, как оптическое манипулирование микрообъектами, квантовая оптика, оптические коммуникации. Каждая мода из этого класса характеризуется двумя индексами — радиальным и азимутальным, задающим орбитальный угловой момент.

Несмотря на давнюю историю и большой объем проведенных исследований в отношении мод ЛГ, до сих пор появляются публикации по изучению их свойств [123–127], формированию [128–130] и применению [131–135].

Так, в [123] рассматривается распространение композитных вихревых пучков, представляющих собой соосную суперпозицию мод ЛГ с совпадающими положением и размером перетяжки. Были сформированы поля, состоящие из эквидистантных массивов одиночных или парных теневых пятен, расположенных на световых кольцах. В [124] исследуется физический смысл радиального индекса мод ЛГ, а в [125] исследуется пространственное распределение интенсивности острокфокусированного пучка ЛГ в зависимости от вида однородной (линейной и круговой) поляризации и топологического заряда. Показано, что наибольшее влияние тип поляризации оказывает на продольную компоненту электрического вектора светового поля, а наибольшее визуальное различие в картине общей интенсивности в зависимости от поляризации наблюдается при использовании вихревой фазы первого порядка. В [126] исследуется непараксиальное распространение мод ЛГ в присутствии апертуры. Установлено, что дифракция на апертуре вызывает существенное искажение поля в ближней зоне, однако она незначительно влияет на распределение интенсивности в дальней зоне (если только апертура не закрывает существенную часть пучка). В [127] рассматриваются свойства световых полей, обладающих орбитальным угловым моментом и не имеющих радиальной симметрии, в присутствии гармонического потенциала. В [128] предлагается метод формирования мод ЛГ в резонаторе твердотельного лазера. В [129] также рассматривается формирование мод ЛГ низших порядков в твердотельном лазере с контролируемым знаком топологического заряда. В [130] моды ЛГ с ненулевым радиальным индексом формируются с помощью зонных спиральных фазовых пластинок. В [131] показано, что при использовании моды ЛГ вместо обычного гауссова пучка уменьшается доплеровская ширина линии в спектре поглощения атомов рубидия-85 и рубидия-87, а в [132] рассматривается применение мод ЛГ для уменьшения влияния теплового шума в детекторах гравитационных волн. В [133] исследуется использование мод ЛГ для организации спин-орбитального взаимодействия в ультра-холодных атомах. В [134] изучается взаимодействие пучка ЛГ с атомом или двухатомной молекулой. Численно показано, что если атом или молекула достаточно охлаждены, то происходит передача орбитального углового момента между движением центра масс и внутренним движением. В [135] описывается трехмерная внеосевая оптическая ловушка диэлектрических субмикронных микросфер, созданная с помощью одиночного пучка ЛГ. Работа [136] посвящена применению мод Лагерра–Гаусса для квантовых коммуникаций на расстояние около 3 км в турбулентной атмосфере.

Из приведенного выше обзора новейшей литературы о модах ЛГ видно, что они не только находят новые применения, но и являются основой для построения новых видов световых полей, которые пока только изучаются теоретически. Наряду с исследованием различных супер-

позиций известных лазерных пучков новые их виды можно получать простым смещением комплексной амплитуды в декартовых координатах на комплексные расстояния. Так, например, выражение для поля точечного источника с мнимой координатой сводится к параксиальному гауссову пучку в том случае, когда мнимое расстояние от источника до вещественного пространства во много раз превосходит длину волны света [137]. Аналогичным образом были получены асимметричные бездифракционные моды Бесселя, распределение интенсивности которых в поперечной плоскости имеет вид полумесяца [138].

В данном разделе, также пользуясь приемом комплексного смещения в декартовых координатах, теоретически и экспериментально исследуются асимметричные пучки Лагерра–Гаусса (аЛГ-пучки). Подобно стандартным модам ЛГ, их распределение интенсивности в поперечной плоскости также состоит из конечного (в отличие от мод Бесселя) числа световых колец, но распределение интенсивности на кольцах неравномерное. При распространении в однородной среде возрастает яркость на периферийном кольце. Аналитически рассчитан орбитальный угловой момент (ОУМ) и мощность аЛГ-пучка. В качестве частного случая рассмотрены аЛГ-пучки с нулевым радиальным индексом, обладающие поперечным сечением интенсивности в форме полумесяца. Для таких пучков аналитически получено выражение для координат максимума интенсивности и показано вращение дифракционной картины при распространении в однородной среде. Пучок аЛГ с нулевым радиальным индексом был сформирован с помощью пространственного модулятора света, и его вращение в пространстве подтверждено экспериментально. Показана возможность формирования несоосных суперпозиций пучков с распределением интенсивности, близким к гауссову, вращающихся при распространении в пространстве как единое целое.

4.2.1. Пучки Лагерра–Гаусса с комплексным смещением. Комплексная амплитуда стандартного пучка ЛГ в начальной плоскости в полярных координатах имеет вид [139]

$$E_{mn}(r, \varphi, z=0) = \left(\frac{\sqrt{2}r}{w_0}\right)^n L_m^n\left(\frac{2r^2}{w_0^2}\right) \exp\left(-\frac{r^2}{w_0^2} + in\varphi\right), \quad (4.27)$$

где (r, φ, z) — цилиндрические координаты, w_0 — радиус перетяжки гауссова пучка, n — топологический заряд оптического вихря, $L_m^n(x)$ — присоединенный многочлен Лагерра.

Если сместить пучок на расстояние x_0 вдоль координаты x и на расстояние y_0 вдоль координаты y (смещения x_0 и y_0 могут быть комплексными величинами), то в декартовых координатах амплитуда пучка равна:

$$E_{mn}(x, y, z=0) = \left(\frac{\sqrt{2}}{w_0}\right)^n [(x-x_0) + i(y-y_0)]^n \exp\left(-\frac{\rho^2}{w_0^2}\right) L_m^n\left(\frac{2\rho^2}{w_0^2}\right), \quad (4.28)$$

где $\rho^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2$.

При распространении в свободном пространстве на произвольном расстоянии z комплексная амплитуда такого светового пучка примет вид:

$$E_{mn}(x, y, z) = \frac{w(0)}{w(z)} \left[\frac{\sqrt{2}}{w(z)}\right]^n [(x-x_0) + i(y-y_0)]^n L_m^n\left[\frac{2\rho^2}{w^2(z)}\right] \times \exp\left[-\frac{\rho^2}{w^2(z)} + \frac{ik\rho^2}{2R(z)} - i(n+2m+1)\zeta(z)\right], \quad (4.29)$$

где

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2}, \quad (4.30)$$

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{z_R}{z}\right)^2\right],$$

$$\zeta(z) = \arctg\left(\frac{z}{z_R}\right),$$

$z_R = kw_0^2/2$ — расстояние Рэлея, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число света с длиной волны λ .

Если смещения x_0 и y_0 не являются действительными величинами, то величины ρ^2 , $w(z)$, $R(z)$ уже не имеют того физического смысла, что при вещественных смещениях x_0 и y_0 , т.е. это не расстояние до оптической оси, не ширина пучка и не радиус кривизны волнового фронта. Кроме того, в отличие от стандартных мод ЛГ, в поперечном сечении интенсивность такого пучка не имеет радиальной симметрии. На рис. 4.8 приведены результаты расчета поперечной интенсивности пучка (4.29) на разных расстояниях при следующих значениях параметров: длина волны $\lambda = 532$ нм, радиус перетяжки $w_0 = 2\lambda$, индекс пучка $(m, n) = (8, 7)$, поперечные смещения $x_0 = 0$, $y_0 = 0,2\lambda i$, расстояния вдоль оптической оси равны $z = 0$ (рис. 4.8, а), 12λ (рис. 4.8, б), 20λ (рис. 4.8, в), 40λ (рис. 4.8, г), 60λ (рис. 4.8, д), 80λ (рис. 4.8, е). Размер расчетной области равен $2R$, где $R = 15\lambda$ (рис. 4.8, а), 20λ (рис. 4.8, б), 25λ (рис. 4.8, в), 35λ (рис. 4.8, г), 50λ (рис. 4.8, д), 75λ (рис. 4.8, е). Расстояние Рэлея при заданных параметрах равно $z_R = 4\pi\lambda$.

Из рис. 4.8 видно, что при распространении пучка первое кольцо в виде полумесяца становится почти кольцом, хотя периферийные

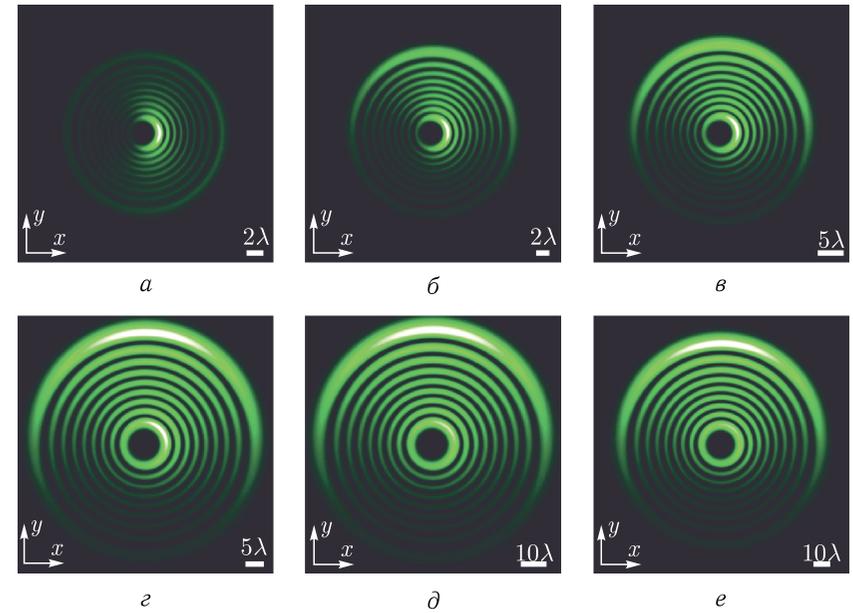


Рис. 4.8. Поперечное распределение интенсивности аЛГ-пучка в разных плоскостях при следующих значениях параметров: длина волны $\lambda = 532$ нм, радиус перетяжки $w_0 = 2\lambda$, индекс пучка $(m, n) = (8, 7)$, поперечные смещения $x_0 = 0$, $y_0 = 0,2\lambda i$, расстояния вдоль оптической оси равны $z = 0$ (а), 12λ (б), 20λ (в), 40λ (г), 60λ (д), 80λ (е)

кольца полностью не восстанавливаются. Также видно, что при распространении аЛГ-пучка энергия перераспределяется из полумесяца в периферийные кольца.

4.2.2. Мощность смещенного пучка Лагерра–Гаусса. Мощность произвольного парааксиального светового пучка, протекающая через произвольную плоскость, перпендикулярную оптической оси, может быть вычислена как через комплексную амплитуду E , так и через угловой спектр плоских волн A :

$$W = \iint_{\mathbb{R}^2} E^* E dx dy = \lambda^2 \iint_{\mathbb{R}^2} A^* A d\alpha d\beta, \quad (4.31)$$

где

$$A(\alpha, \beta) = \lambda^{-2} \iint_{\mathbb{R}^2} E(x, y, 0) \exp[-ik(\alpha x + \beta y)] dx dy. \quad (4.32)$$

Для аЛГ-пучка удобнее рассчитывать мощность в спектральной плоскости. Сначала получим выражение для углового спектра плоских

волн несмещенного пучка:

$$\begin{aligned}
A(\rho, \theta) &= \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{\sqrt{2}}{w_0} \right)^n \int_0^\infty r^n \exp\left(-\frac{r^2}{w_0^2}\right) L_m^n\left(\frac{2r^2}{w_0^2}\right) \times \\
&\quad \times \left\{ \int_0^{2\pi} \exp[in\varphi - ik\rho r \cos(\varphi - \theta)] d\varphi \right\} r dr = \\
&= (-i)^n \frac{k^2}{2\pi} \left(\frac{\sqrt{2}}{w_0} \right)^n \exp(in\theta) \int_0^\infty r^{n+1} \times \\
&\quad \times \exp\left(-\frac{r^2}{w_0^2}\right) L_m^n\left(\frac{2r^2}{w_0^2}\right) J_n(k\rho r) dr, \quad (4.33)
\end{aligned}$$

где (r, φ) и (ρ, θ) — полярные координаты в начальной плоскости и в Фурье-плоскости соответственно (ρ — безразмерная координата).

Известен справочный интеграл ([140], выражение 7.421.4):

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty x^{\nu+1} \exp(-\beta x^2) L_n^\nu(\alpha x^2) J_\nu(xy) dx = \\
&= \frac{(\beta - \alpha)^n y^\nu}{2^{\nu+1} \beta^{\nu+n+1}} \exp\left(-\frac{y^2}{4\beta}\right) L_n^\nu\left[\frac{\alpha y^2}{4\beta(\alpha - \beta)}\right]. \quad (4.34)
\end{aligned}$$

Используя его, получим выражение для углового спектра плоских волн пучка ЛГ:

$$A(\rho, \theta) = C_0 \rho^n L_m^n \left[\frac{(kw_0\rho)^2}{2} \right] \exp \left[-\frac{(kw_0\rho)^2}{4} + in\theta \right], \quad (4.35)$$

где

$$C_0 = (-i)^n (-1)^m \frac{(kw_0)^{n+2}}{2^{2+n/2}\pi}. \quad (4.36)$$

Для смещенного пучка (4.28) выражение для углового спектра плоских волн имеет вид:

$$\begin{aligned}
A(\rho, \theta) &= C_0 \rho^n \exp \left[-\frac{(kw_0\rho)^2}{4} + in\theta \right] \times \\
&\quad \times L_m^n \left[\frac{(kw_0\rho)^2}{2} \right] \exp[-ik\rho(x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta)]. \quad (4.37)
\end{aligned}$$

Используя выражение (4.37), найдем мощность аЛГ-пучка:

$$\begin{aligned}
W &= 2\pi\lambda^2 |C_0|^2 \int_0^\infty \rho^{2n+1} \exp \left[-\frac{(kw_0\rho)^2}{2} \right] \times \\
&\quad \times \left\{ L_m^n \left[\frac{(kw_0\rho)^2}{2} \right] \right\}^2 J_0(2ikD_0\rho) d\rho, \quad (4.38)
\end{aligned}$$

где $D_0 = [(\text{Im } x_0)^2 + (\text{Im } y_0)^2]^{1/2}$.

Интеграл (4.38) можно вычислить с помощью справочного интеграла (выражение 2.9.12.14 в [103], исправленное после численной проверки):

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty x^{(\gamma+\delta)/2} e^{-cx} J_{\gamma+\delta}(b\sqrt{x}) L_\mu^\gamma(cx) L_\nu^\delta(cx) dx = \\
&= \frac{(-1)^{\mu+\nu}}{c^{\gamma+\delta+1}} \left(\frac{b}{2} \right)^{\gamma+\delta} \exp\left(-\frac{b^2}{4c}\right) L_\nu^{\gamma+\mu-\nu} \left(\frac{b^2}{4c} \right) L_\mu^{\delta-\mu+\nu} \left(\frac{b^2}{4c} \right). \quad (4.39)
\end{aligned}$$

Заменим в (4.39) переменную интегрирования $x \rightarrow x^2$ и положим $\mu = m$, $\gamma = n$, $\delta = -n$, $\nu = m + n$, $c = (kw_0)^2/2$, $b = 2ikD_0$. Тогда, с учетом тождества

$$L_\mu^{-\sigma}(x) \equiv [(\mu - \sigma)!/\mu!] (-x)^\sigma L_{\mu-\sigma}^\sigma(x)$$

и заменяя переменную интегрирования $x \rightarrow x^2$, получим выражение для мощности пучка:

$$W = \frac{\pi w_0^2}{2} \frac{(m+n)!}{m!} \exp\left(\frac{2D_0^2}{w_0^2}\right) L_{m+n} \left(-\frac{2D_0^2}{w_0^2}\right) L_m \left(-\frac{2D_0^2}{w_0^2}\right). \quad (4.40)$$

Несмотря на пропорциональность мощности пучка многочленом Лагерра, мощность не может оказаться отрицательной или равной нулю. Это следует из того, что $2(D_0/w_0)^2 \geq 0$, а многочлены Лагерра в области не положительных значений всегда положительны:

$$\begin{aligned}
L_m(-\xi) &= \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{k!} C_m^k (-\xi)^k = \\
&= \sum_{k=0}^m C_m^k \frac{\xi^k}{k!} = 1 + \underbrace{\sum_{k=0}^{m-1} C_m^k \frac{\xi^k}{k!}}_{\geq 0} \geq 1. \quad (4.41)
\end{aligned}$$

Из (4.41) и из наличия множителя $\exp[2(D_0/w_0)^2]$ в (4.40) следует, что смещение на комплексную величину всегда приводит к увеличению мощности пучка.

В частном случае, при смещении пучка на вещественные расстояния параметр D_0 становится равным нулю и мощность принимает значение $[\pi w_0^2/2][(m+n)!/m!]$, совпадающее с выражением для мощности пучков ЛГ из [139] с точностью до константы.

Физического смысла в увеличении мощности с ростом асимметрии аЛГ-пучков нет. Но для расчета нормированного ОУМ в следующем разделе выражение (4.40) будет использовано.

4.2.3. Орбитальный угловой момент смещенного пучка Лагерра–Гаусса. Получим теперь выражение для проекции ОУМ аЛГ-пучка на оптическую ось (остальные проекции для парааксиальных пучков равны нулю). Это также удобно сделать через угловой спектр плоских волн:

$$J_z = -i\lambda^2 \iint_{\mathbb{R}^2} A^* \frac{\partial A}{\partial \theta} \rho d\rho d\theta. \quad (4.42)$$

Подставив (4.37) в (4.42), получим:

$$\begin{aligned} J_z = & -i\lambda^2 |C_0|^2 \iint_{\mathbb{R}^2} \rho^{2n} \exp\left[-\frac{(k w \rho)^2}{2}\right] \left\{ L_m^n \left[\frac{(k w \rho)^2}{2} \right] \right\}^2 \times \\ & \times \exp[-in\theta + ik\rho(x_0^* \cos \theta + y_0^* \sin \theta)] \times \\ & \times [in + ik\rho(x_0 \sin \theta - y_0 \cos \theta)] \times \\ & \times \exp[in\theta - ik\rho(x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta)] \rho d\rho d\theta. \quad (4.43) \end{aligned}$$

Выделим отдельно слагаемое, пропорциональное мощности:

$$\begin{aligned} J_z = & nW + k\lambda^2 |C_0|^2 \int_0^\infty \rho^{2n+2} \exp\left[-\frac{(k w \rho)^2}{2}\right] \left\{ L_m^n \left[\frac{(k w \rho)^2}{2} \right] \right\}^2 d\rho \times \\ & \times \int_0^{2\pi} (x_0 \sin \theta - y_0 \cos \theta) \exp\{2k\rho[(\text{Im } x_0) \cos \theta + (\text{Im } y_0) \sin \theta]\} d\theta. \quad (4.44) \end{aligned}$$

Внутренний интеграл выражается через функции Бесселя [141]. Тогда (4.44) примет вид:

$$\begin{aligned} J_z = & nW - 2\pi k\lambda^2 |C_0|^2 \int_0^\infty \rho^{2n+2} \exp\left[-\frac{(k w \rho)^2}{2}\right] \left\{ L_m^n \left[\frac{(k w \rho)^2}{2} \right] \right\}^2 \times \\ & \times \left\{ (ix_0 + y_0) \left[\frac{(\text{Im } x_0) - (\text{Im } y_0)}{2iD_0} \right] + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left. + (ix_0 - y_0) \left[\frac{(\text{Im } x_0) - (\text{Im } y_0)}{2iD_0} \right]^{-1} \right\} iI_1(2kD_0\rho) d\rho = \\ & = nW + 4\pi^2 \lambda |C_0|^2 \frac{\text{Im}(x_0^* y_0)}{D_0} \times \\ & \times \int_0^\infty \rho^{2n+2} \exp\left[-\frac{(k w \rho)^2}{2}\right] \left\{ L_m^n \left[\frac{(k w \rho)^2}{2} \right] \right\}^2 I_1(2kD_0\rho) d\rho. \quad (4.45) \end{aligned}$$

Этот интеграл можно вычислить, как и интеграл для мощности пучка, если представить его как производную по D_0 :

$$\begin{aligned} J_z = & nW - 4\pi^2 \lambda |C_0|^2 \frac{\text{Im}(x_0^* y_0)}{2kD_0} \times \\ & \times \frac{\partial}{\partial D_0} \left(\int_0^\infty \rho^{2n+1} \exp\left[-\frac{(k w \rho)^2}{2}\right] \left\{ L_m^n \left[\frac{(k w \rho)^2}{2} \right] \right\}^2 I_0(2kD_0\rho) d\rho \right). \quad (4.46) \end{aligned}$$

Интеграл в (4.46) является берущимся и совпадает с интегралом для расчета мощности:

$$\begin{aligned} J_z = & nW - 4\pi^2 \lambda |C_0|^2 \frac{\text{Im}(x_0^* y_0)}{2kD_0} \times \\ & \times \frac{\partial}{\partial D_0} \left\{ \frac{2^n}{(k w_0^2)^{2n+2}} \frac{(m+n)!}{m!} \exp\left(\frac{2D_0^2}{w_0^2}\right) L_{m+n}\left(-\frac{2D_0^2}{w_0^2}\right) L_m\left(-\frac{2D_0^2}{w_0^2}\right) \right\} = \\ & = nW - \frac{\pi w_0^2}{4} \frac{(m+n)!}{m!} \frac{\text{Im}(x_0^* y_0)}{D_0} \frac{\partial}{\partial D_0} \times \\ & \times \left\{ \exp\left(\frac{2D_0^2}{w_0^2}\right) L_{m+n}\left(-\frac{2D_0^2}{w_0^2}\right) L_m\left(-\frac{2D_0^2}{w_0^2}\right) \right\}. \quad (4.47) \end{aligned}$$

Вычисляя производную, получим выражение для нормированного ОУМ:

$$\frac{J_z}{W} = n + \frac{2\text{Im}(x_0^* y_0)}{w_0^2} \left[\frac{L_m^1\left(-\frac{2D_0^2}{w_0^2}\right)}{L_m\left(-\frac{2D_0^2}{w_0^2}\right)} + \frac{L_{m+n}^1\left(-\frac{2D_0^2}{w_0^2}\right)}{L_{m+n}\left(-\frac{2D_0^2}{w_0^2}\right)} - 1 \right]. \quad (4.48)$$

Из (4.48) видно, что нормированный ОУМ (ОУМ на один фотон) не зависит от длины волны, а полностью определяется отношением смещений к радиусу перетяжки, т. е. величинами x_0/w_0 и y_0/w_0 .

Можно показать, что увеличение или уменьшение нормированного ОУМ полностью определяется знаком величины $\text{Im}(x_0^*y_0)$, так как выражение в квадратных скобках всегда больше или равно 1.

Нормированный ОУМ зависит сразу от нескольких параметров — от обоих индексов полиномов Лагерра и от вещественных и мнимых смещений вдоль обеих декартовых координат. Рассмотрим частный случай, когда величина $x_0^*y_0$ чисто мнимая, причем комплексные смещения равны по модулю. Пусть $x_0 = aw_0 \exp(i\eta)$, $y_0 = ix_0$, где a — модуль нормированного комплексного смещения (т. е. $a = |x_0/w_0|$). Тогда выражение для ОУМ примет вид

$$\frac{J_z}{W} = n - \xi \left[\frac{L_m^1(\xi)}{L_m(\xi)} + \frac{L_{m+n}^1(\xi)}{L_{m+n}(\xi)} - 1 \right], \quad (4.49)$$

где $\xi = -2a^2$. Параметр a можно назвать параметром асимметрии аЛГ-пучка. Из (4.49) видно, что при $|\xi| \gg 1$ нормированный ОУМ равен примерно $J_z/W \approx n - \xi$, т. е. зависит квадратично от параметра асимметрии a , что подтверждается графиком на рис. 4.9, рассчитанным по формуле (4.49) для $m = 3$ и $n = 5$.

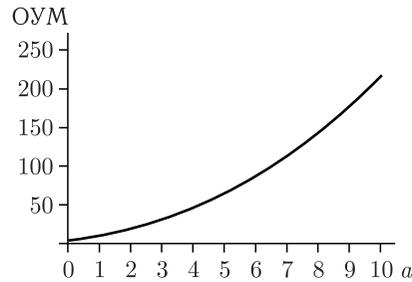


Рис. 4.9. Зависимость нормированного ОУМ от нормированного параметра асимметрии a

Из рис. 4.9 видно, что в отличие от обычных мод ЛГ, у аЛГ-пучков ОУМ меняется непрерывно, пробегая целые и дробные значения. Из (4.48) также следует, что при $x_0^*y_0 \in \mathbb{R}$ нормированный ОУМ совпадает с топологическим зарядом n , как в случае радиально-симметричных оптических вихрей, хотя форма пучка не обладает радиальной симметрией (если x_0 и y_0 чисто мнимые). Так, на рис. 4.10 показаны распределения интенсивности в плоскости $z = 0$ для аЛГ-пучков при следующих параметрах: длина волны $\lambda = 532$ нм, радиус перетяжки $w = 2\lambda$, индекс пучка $(m, n) = (3, 5)$, поперечные смещения $x_0 = 0,01wi$ и $y_0 = 0,01wi$ (рис. 4.10, а), $x_0 = 0,05wi$ и $y_0 = 0,05wi$ (рис. 4.10, б), $x_0 = 0,1wi$ и $y_0 = 0,1wi$ (рис. 4.10, в), $x_0 = 0,2wi$ и $y_0 = 0,2wi$ (рис. 4.10, г), $x_0 = 0,5wi$ и $y_0 = 0,5wi$ (рис. 4.10, д), $x_0 = 2wi$ и $y_0 = 2wi$ (рис. 4.10, е). Размер расчетной области равен $2R$, где

$R = 10\lambda$. Согласно (4.48), ОУМ на всех рис. 4.10 должен быть равен 5. При расчете он оказался равен 4,999 (рис. 4.10, а–г) и 4,998 (рис. 4.10, д, е).

Из рис. 4.10 видно, что все эти пучки имеют разный вид — почти радиально симметричные световые кольца на рис. 4.10, а, световая дуга (полумесяц), окруженная периферийными кольцами, на рис. 4.10 б и 4.10, в, полумесяц с разорванными периферийными кольцами (рис. 4.10, г), полумесяц без периферийных колец (рис. 4.10, д),

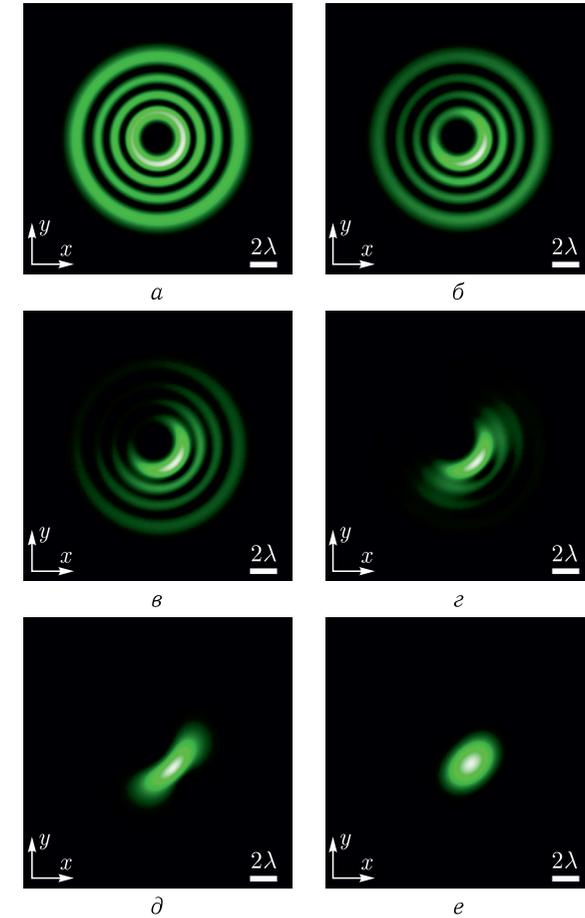


Рис. 4.10. Распределения интенсивности в плоскости $z = 0$ для аЛГ-пучков при следующих параметрах: длина волны $\lambda = 532$ нм, радиус перетяжки $w = 2\lambda$, индекс пучка $(m, n) = (3, 5)$, поперечные смещения $x_0 = 0,01wi$ и $y_0 = 0,01wi$ (а), $x_0 = 0,05wi$ и $y_0 = 0,05wi$ (б), $x_0 = 0,1wi$ и $y_0 = 0,1wi$ (в), $x_0 = 0,2wi$ и $y_0 = 0,2wi$ (г), $x_0 = 0,5wi$ и $y_0 = 0,5wi$ (д), $x_0 = 2wi$ и $y_0 = 2wi$ (е)

эллиптическое световое пятно (рис. 4.10, *e*). Однако, несмотря на разный вид, нормированный ОУМ всех этих пучков одинаков.

4.2.4. Параксиальные пучки Лагерра–Гаусса в форме вращающегося полумесяца. Выражение (4.29) существенно упрощается в случае, когда $m = 0$, т.е. на дифракционной картине всего одно световое кольцо. Интенсивность в этом случае имеет следующий вид:

$$I_{0n}(x, y, z) = |E|^2 = \frac{w^2(0)}{w^2(z)} \left[\frac{\sqrt{2}}{w^2(z)} \right]^n \exp \left[2 \frac{(\operatorname{Im} x_0)^2 + (\operatorname{Im} y_0)^2}{w^2(z)} \right] \times \\ \times \left[(u + \operatorname{Im} y_0)^2 + (v - \operatorname{Im} x_0)^2 \right]^n \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{2(u^2 + v^2)}{w^2(z)} + \frac{2k[(\operatorname{Im} x_0)u + (\operatorname{Im} y_0)v]}{R(z)} \right\}. \quad (4.50)$$

где $u = x - \operatorname{Re} x_0$, $v = y - \operatorname{Re} y_0$. Далее для краткости введем обозначение $D_0 = [(\operatorname{Im} x_0)^2 + (\operatorname{Im} y_0)^2]^{1/2}$.

Интенсивность не может быть отрицательной, поэтому нули интенсивности являются ее минимумами. Из (4.50) видно, что при распространении аЛГ-пучка в однородном пространстве при $n > 0$ имеется минимум интенсивности в центре пучка (точка фазовой сингулярности) с координатами $(x_{\min}, y_{\min}) = (\operatorname{Re} x_0 - \operatorname{Im} y_0, \operatorname{Re} y_0 + \operatorname{Im} x_0)$. Приравнявая нулю частные производные интенсивности (4.50) по декартовым координатам, можно показать, что при $n > 0$ положение максимума интенсивности зависит от пройденного расстояния z и вращается относительно минимума:

$$\frac{y_{\max} - \operatorname{Re} y_0 - \operatorname{Im} x_0}{x_{\max} - \operatorname{Re} x_0 + \operatorname{Im} y_0} = \frac{(\operatorname{Im} y_0)z - (\operatorname{Im} x_0)z_R}{(\operatorname{Im} x_0)z + (\operatorname{Im} y_0)z_R}, \quad (4.51)$$

где (x_{\max}, y_{\max}) — координаты точки с максимальной интенсивностью.

Введем новую систему координат, сдвинутую и повернутую относительно исходной системы на угол, зависящий от пройденного расстояния z :

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - \operatorname{Re} x_0 + \operatorname{Im} y_0 \\ y - \operatorname{Re} y_0 - \operatorname{Im} x_0 \end{pmatrix}, \quad (4.52)$$

где

$$\varphi = \operatorname{arctg} \left[\frac{(\operatorname{Im} y_0)z - (\operatorname{Im} x_0)z_R}{(\operatorname{Im} x_0)z + (\operatorname{Im} y_0)z_R} \right], \\ \cos \varphi = \frac{(\operatorname{Im} x_0)z + (\operatorname{Im} y_0)z_R}{D_0 \sqrt{z^2 + z_R^2}}, \quad (4.53) \\ \sin \varphi = \frac{(\operatorname{Im} y_0)z - (\operatorname{Im} x_0)z_R}{D_0 \sqrt{z^2 + z_R^2}}.$$

В новой системе координат (ξ, η) интенсивность (4.50) примет вид:

$$I_{0n}(\xi, \eta, z) = |E|^2 = \frac{w^2(0)}{w^2(z)} \left[\frac{\sqrt{2}}{w^2(z)} \right]^n (\xi^2 + \eta^2)^n \times \\ \times \exp \left[-\frac{2(\xi^2 + \eta^2)}{w^2(z)} + \frac{2kD_0}{\sqrt{z^2 + z_R^2}} \xi \right]. \quad (4.54)$$

Можно показать, что такая функция имеет три стационарные точки. Первая из них — точка минимума $\xi = 0$, $\eta = 0$, соответствующая упомянутой выше точке (x_{\min}, y_{\min}) . Вторая — точка максимума с координатами

$$\begin{cases} \xi_{\max} = \frac{1}{2} \frac{w(z)}{w(0)} \left(D_0 + \sqrt{D_0^2 + 2nw_0^2} \right), \\ \eta_{\max} = 0, \end{cases} \quad (4.55)$$

а третья — седловая точка с координатами

$$\begin{cases} \xi_{\text{saddle}} = \frac{1}{2} \frac{w(z)}{w(0)} \left(D_0 - \sqrt{D_0^2 + 2nw_0^2} \right), \\ \eta_{\text{saddle}} = 0, \end{cases} \quad (4.56)$$

которая является точкой максимума по переменной ξ и точкой минимума по переменной η . Максимум интенсивности по переменной ξ означает, что точка лежит на световом кольце, а минимум по переменной η — что это точка с минимальной на кольце интенсивностью.

В исходной системе координат точка максимума интенсивности имеет следующие координаты:

$$\begin{cases} x_{\max} = \operatorname{Re} x_0 - \operatorname{Im} y_0 + \frac{(\operatorname{Im} x_0)z + (\operatorname{Im} y_0)z_R}{2z_R} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2nw_0^2}{D_0^2}} \right), \\ y_{\max} = \operatorname{Re} y_0 + \operatorname{Im} x_0 + \frac{(\operatorname{Im} y_0)z - (\operatorname{Im} x_0)z_R}{2z_R} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2nw_0^2}{D_0^2}} \right). \end{cases} \quad (4.57)$$

Из (4.57) следует, что точка с максимальной интенсивностью (x_{\max}, y_{\max}) вращается вокруг точки (x_{\min}, y_{\min}) , поворачиваясь на угол α_0 на расстоянии

$$z = z_R \tan(\alpha_0). \quad (4.58)$$

На рис. 4.11 приведены результаты расчета поперечной интенсивности пучка (4.29) с нулевым радиальным индексом $m = 0$ в разных плоскостях при следующих значениях параметров: длина волны $\lambda = 532$ нм, радиус перетяжки $w_0 = 5\lambda$ (т.е. расстояние Рэлея равно $z_R = 25\pi\lambda$), топологический заряд $n = 8$, поперечные смещения $x_0 = 0,25\lambda = w_0/20$

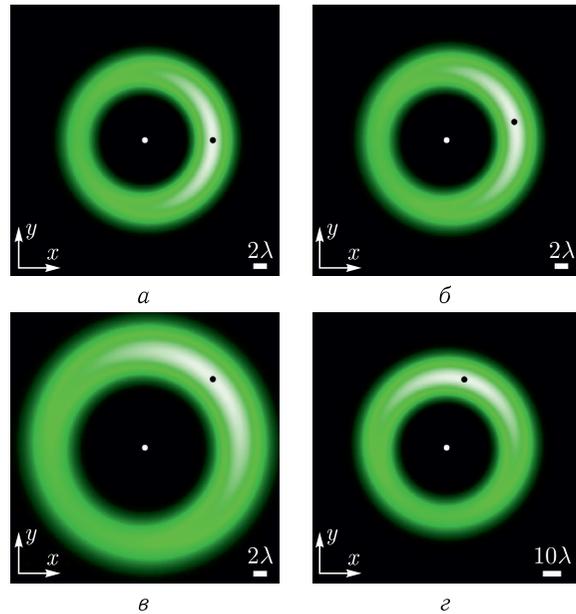


Рис. 4.11. Поперечное распределение интенсивности пучка (4.29) с нулевым радиальным индексом $m=0$ на разных расстояниях при следующих значениях параметров: длина волны $\lambda = 532$ нм, радиус перетяжки $w_0 = 5\lambda$, топологический заряд $n = 8$, поперечные смещения $x_0 = 0,25\lambda = w_0/20$ и $y_0 = 0,25\lambda i = iw_0/20$, расстояния вдоль оптической оси равны $z = 0$ (а), $z_R \tan(\pi/12)$ (б), $z_R \tan(\pi/4) = z_R$ (в), $z_R \tan(5\pi/12)$ (г). Размер расчетной области равен $2R$, где $R = 20\lambda$ (а), 20λ (б), 20λ (в), 75λ (г). Черной точкой отмечено положение максимума интенсивности, вычисленное по формуле (4.57)

и $y_0 = 0,25\lambda i = iw_0/20$, расстояния вдоль оптической оси равны $z = 0$ (рис. 4.11, а), $z_R \tan(\pi/12)$ (рис. 4.11, б), $z_R \tan(\pi/4) = z_R$ (рис. 4.11, в), $z_R \tan(5\pi/12)$ (рис. 4.11, г). Центр пучка находится в начале координат: $(x_{\min}, y_{\min}) = (0, 0)$. Размер расчетной области равен $2R$, где $R = 20\lambda$ (рис. 4.11, а), 20λ (рис. 4.11, б), 20λ (рис. 4.11, в), 75λ (рис. 4.11, г). Черной точкой отмечено положение максимума интенсивности, вычисленное по формуле (4.57). Белой точкой отмечены точки минимума интенсивности или точки фазовой сингулярности.

Из (4.54)–(4.56) следует, что отношение максимальной интенсивности на световом кольце к минимальной (т.е. в седловой точке) определяется следующим выражением:

$$\frac{I_{0n,\max}}{I_{0n,\text{saddle}}} = \left(\frac{\sqrt{D_0^2 + 2nw_0^2} + D_0}{\sqrt{D_0^2 + 2nw_0^2} - D_0} \right)^{2n} \exp\left(\frac{2D_0}{w_0^2} \sqrt{D_0^2 + 2nw_0^2} \right). \quad (4.59)$$

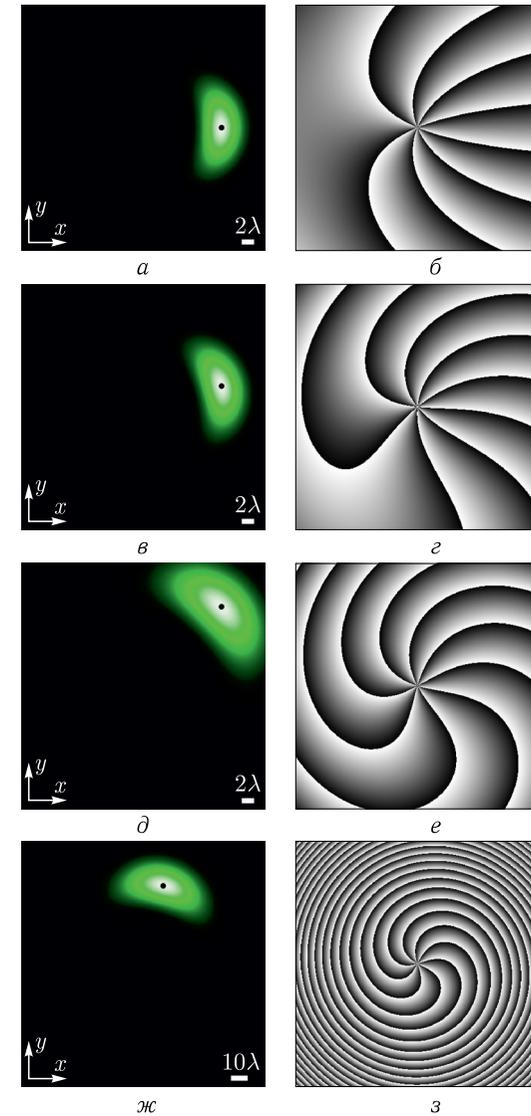


Рис. 4.12. Поперечное распределение интенсивности пучка (4.29) с нулевым радиальным индексом $m=0$ на разных расстояниях z при следующих значениях параметров: длина волны $\lambda = 532$ нм, радиус перетяжки $w_0 = 5\lambda$, топологический заряд $n = 8$, поперечные смещения $x_0 = 5\lambda = w_0$ и $y_0 = 5\lambda i = iw_0$, расстояния вдоль оптической оси равны $z = 0$ (а), $z_R \tan(\pi/12)$ (б), $z_R \tan(\pi/4) = z_R$ (в), $z_R \tan(5\pi/12)$ (г). Размер расчетной области равен $2R$, где $R = 20\lambda$ (а), 20λ (б), 20λ (в), 75λ (г). Черной точкой отмечено положение максимума интенсивности, вычисленное по формуле (4.57)

Из (4.59) следует, что асимметрия пучка растет экспоненциально с ростом смещения D_0 . Это означает, что при увеличении мнимых смещений $\text{Im}(x_0)$ и $\text{Im}(y_0)$ происходит «разрыв» светового кольца, и распределение интенсивности имеет вид светового пятна, смещенного от центра, вращающегося при распространении относительно точки фазовой сингулярности (x_{\min}, y_{\min}) . Слово «разрыв» взято в кавычки, так как нулевой интенсивности на световом кольце быть не может (знаменатель в (4.59) никогда не обращается в нуль при $n > 0$).

На рис. 4.12 приведены результаты расчета поперечной интенсивности и фазы того же пучка, что и на рис. 4.11, но с большими смещениями $x_0 = 5\lambda = w_0$ и $y_0 = 5\lambda i = iw_0$. Все остальные параметры те же, что и на рис. 4.11. Черной точкой отмечено положение максимума интенсивности, вычисленное по формуле (4.57).

Из рис. 4.12 видно, что вытянутое световое пятно поворачивается соответственно на углы $\pi/12$, $\pi/4$, $5\pi/12$, в то время как центр фазовой сингулярности остается в начале координат.

Асимметричный пучок ЛГ при $m = 0$ похож на асимметричный пучок Бесселя–Гаусса (аБГ-пучок) [142]. У обоих пучков одинаковая скорость вращения, определяемая формулой (4.58). Однако, аБГ-пучок труднее поддается аналитическому описанию — для него в [142] получены формулы для координат нулей интенсивности, но нет формул для определения координат максимумов интенсивности, подобных (4.57). ОУМ аБГ-пучка описывается через ряды модифицированных функций Бесселя, в отличие от замкнутого выражения для ОУМ аЛГ-пучков (4.48). Кроме того, ОУМ аЛГ-пучка находится в квадратичной зависимости от параметра асимметрии, а ОУМ аБГ-пучка — в зависимости, близкой к линейной [142].

4.2.5. Экспериментальное формирование асимметричного пучка Лагерра–Гаусса. Оптическая схема эксперимента показана на рис. 4.13. Выходной пучок твердотельного лазера L ($\lambda = 532$ нм) расширялся с помощью системы, состоящей из линз L_1 ($f_1 = 250$ мм) и L_2 ($f_2 = 500$ мм). После расширения радиус лазерного пучка составил около 1,1 мм. Расширенный лазерный пучок направлялся на дисплей пространственного модулятора света SLM (PLUTO VIS, разрешение 1920×1080 пикселей, размер пикселя 8 мкм). На дисплее модулятора выводилась фазовая функция, которая представляет собой суперпозицию кодированной фазовой функции исходного элемента, формирующего аЛГ-пучок, и линейной фазовой маски (показано на вставке на рис. 4.13). Это было сделано для того, чтобы разнести в пространстве первый порядок дифракции и нулевой порядок дифракции, в который отражается немодулированное излучение. Отраженный в первый порядок лазерный пучок с помощью системы линз L_3 ($f_3 = 350$ мм) и L_4 ($f_4 = 150$ мм) направлялся на линзу L_5 ($f_5 = 280$ мм), которая выполняла фокусировку аЛГ-пучка на матрицу CMOS камеры LOMO

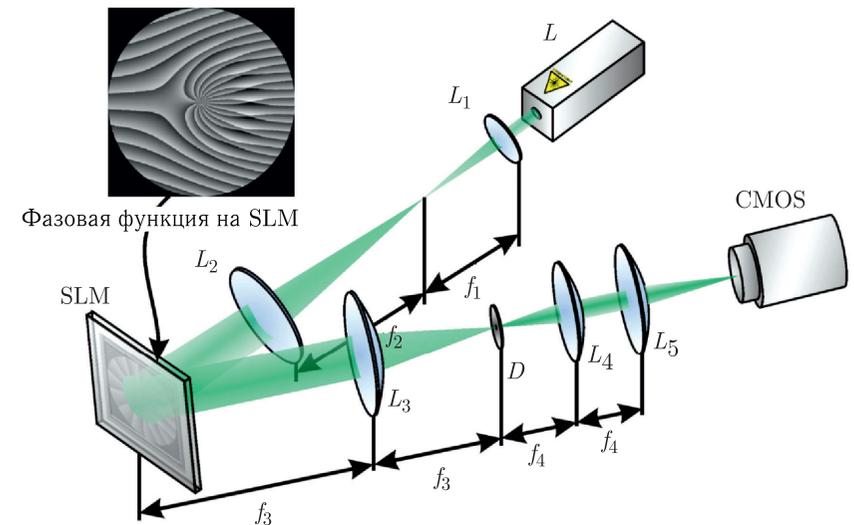


Рис. 4.13. Экспериментальная схема установки для формирования аЛГ-пучков: L — твердотельный лазер ($\lambda = 532$ нм), L_1 , L_2 , L_3 , L_4 и L_5 — линзы с фокусными расстояниями ($f_1 = 250$ мм, $f_2 = 500$ мм, $f_3 = 350$ мм, $f_4 = 150$ мм, $f_5 = 280$ мм), SLM — пространственный модулятор света PLUTO VIS (разрешение 1920×1080 пикселей, размер пикселя 8 мкм), D — диафрагма, выполняющая роль пространственного фильтра, CMOS — видеокамера LOMO TC-1000 (разрешение 3664×2740 пикселей, размер пикселя 1,67 мкм)

TC-1000 (разрешение 3664×2740 пикселей, размер пикселя 1,67 мкм). CMOS-камера установлена на оптическом рельсе и перемещается вдоль него, чтобы снимать распределения интенсивности на различном удалении от линзы L_5 . Диафрагма D выполняет роль пространственного фильтра и блокирует нулевой порядок дифракции.

На рис. 4.14 представлены распределения интенсивности, полученные на различном удалении от поверхности линзы L_5 . Чтобы выполнить съемку изображения на расстоянии 0 мм, линза L_5 временно удалялась из схемы. Из представленных изображений видно, что при удалении от плоскости линзы сформированный пучок в форме полумесяца поворачивается вокруг оси. Пучок, сформированный в фокусе линзы L_5 , повернут на 90 градусов относительно исходного пучка, сформированного в плоскости линзы L_5 . При этом из-за фокусировки также происходит уменьшение поперечных размеров сформированных пучков.

На рис. 4.15 показаны распределения интенсивности, рассчитанные по формуле (4.29) (но с учетом линз) при тех же параметрах, что и параметры эксперимента. Из рис. 4.15 видно, что расчетные и экспериментальные распределения качественно совпадают.

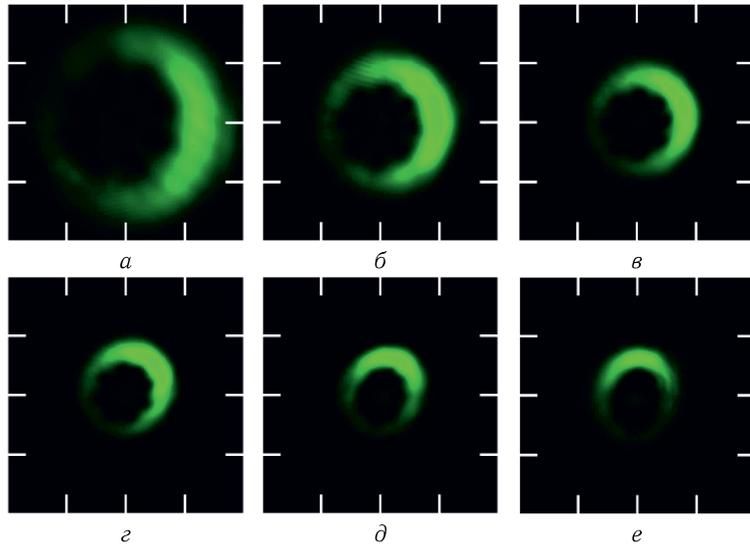


Рис. 4.14. Распределения интенсивности аЛГ-пучка, полученные на различных расстояниях от плоскости линзы L_5 : (а) 0 мм, (б) 100 мм, (в) 150 мм, (г) 200 мм, (д) 250 мм, (е) 280 мм. Размер деления — 500 мкм. Параметры: $w_0 = 1$ мм, $n = 8$, $x_0 = 0,2w_0$, $y_0 = 0,2w_0i$

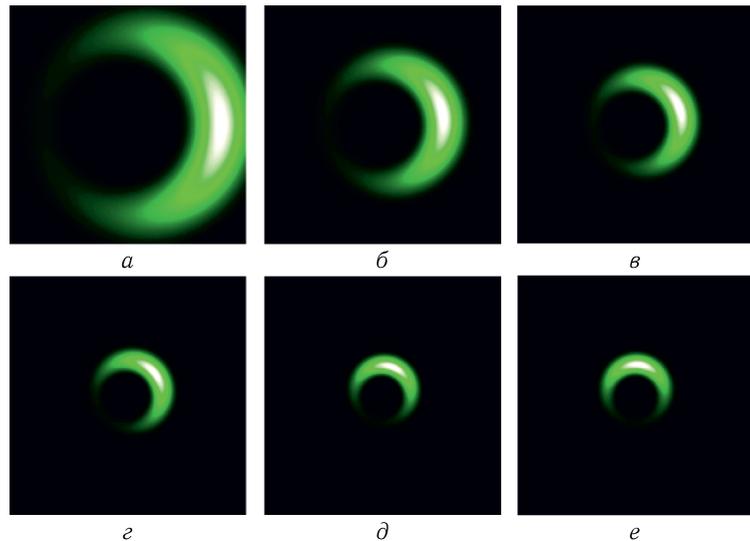


Рис. 4.15. Распределения интенсивности аЛГ-пучка, рассчитанные по формуле (4.29) (с учетом линз) при тех же параметрах, что и на рис. 4.14

4.2.6. Вращающиеся суперпозиции асимметричных пучков Лагерра–Гаусса. При дальнейшем увеличении мнимых смещений x_0 и y_0 асимметрия пучка возрастает настолько, что интенсивность на кольце сосредоточена вблизи точки максимума, определяемой выражением (4.57). Вместо полумесяца поле больше похоже на гауссов пучок, но смещенный от начала координат и поворачивающийся относительно него при распространении в пространстве на угол $\pi/2$.

Это следует из того, что, согласно (4.54), в начальной плоскости в повернутой системе координат (4.52) интенсивность распределена по следующему закону:

$$I_{0n}(\xi, \eta, z=0) = \left(\frac{\sqrt{2}}{w_0^2}\right)^n \exp\left(\frac{2D_0^2}{w_0^2}\right) (\xi^2 + \eta^2)^n \times \\ \times \exp\left\{-\frac{2}{w_0^2}[(\xi - D_0)^2 + \eta^2]\right\}. \quad (4.60)$$

В других плоскостях на расстоянии z интенсивность (4.60) имеет вид:

$$I_{0n}(\xi, \eta, z) = \frac{w^2(0)}{w^2(z)} \left[\frac{\sqrt{2}}{w^2(z)}\right]^n \exp\left(\frac{2D_0^2}{w_0^2}\right) \times \\ \times (\xi^2 + \eta^2)^n \exp\left(-\frac{2}{w^2(z)}\{[\xi - D(z)]^2 + \eta^2\}\right). \quad (4.61)$$

где $D(z) = D_0[1 + (z/z_R)^2]^{1/2} = D_0w(z)/w(0)$.

То есть при $D_0 \gg w_0$ степенная составляющая $(\xi^2 + \eta^2)^n$ мало влияет на вид распределения интенсивности, а оставшаяся экспонента в (4.61) соответствует интенсивности гауссова пучка с радиусом перетяжки $w(z)$, смещенным на расстояние $D(z) \approx \xi_{\max}$ от начала координат (от точки с фазовой сингулярностью). Это означает, что если рассмотреть суперпозицию пучков (4.60) с разными смещениями D_0 , то они будут выглядеть как несоосные гауссовы пучки, которые при распространении поворачиваются на один и тот же угол, определяемый (4.58). Причем, согласно (4.61), при удалении от начальной плоскости на расстояние z смещения максимумов интенсивности от оптической оси увеличатся в $[1 + (z/z_R)^2]^{1/2}$ раз, т. е. пропорционально расширению гауссова пучка. Это означает, что пучки в суперпозиции почти не интерферируют между собой, и при распространении дифракционная картина не меняет своего вида.

Так, на рис. 4.16 показано распространение двух аЛГ-пучков, комплексная амплитуда которых имеет вид:

$$E(x, y, z) = \frac{w(0)}{w(z)} \left[\frac{\sqrt{2}}{w(z)} \right]^n \sum_{j=1}^N C_j [(x - x_{0j}) + i(y - y_{0j})]^n \times \exp \left[-\frac{\rho_j^2}{w^2(z)} + \frac{ik\rho_j^2}{2R(z)} - i(n+1)\zeta(z) \right], \quad (4.62)$$

где $N = 2$ для двух пучков и $N = 3$ для трех пучков, (x_{0j}, y_{0j}) — смещения j -го пучка, а $\rho_j = [(x - x_{0j})^2 + (y - y_{0j})^2]^{1/2}$. Коэффициенты C_j подбирались так, чтобы максимальная интенсивность всех пучков была одинакова. Другие параметры расчета были выбраны следующими: длина волны $\lambda = 532$ нм, радиус перетяжки $w_0 = 5\lambda$ (расстояние Рэлея $z_R = 25\pi\lambda$), индекс пучка $(m, n) = (0, 8)$, поперечные смещения первого пучка $x_0 = 5w_0$, $y_0 = 5w_0i$, поперечные сме-

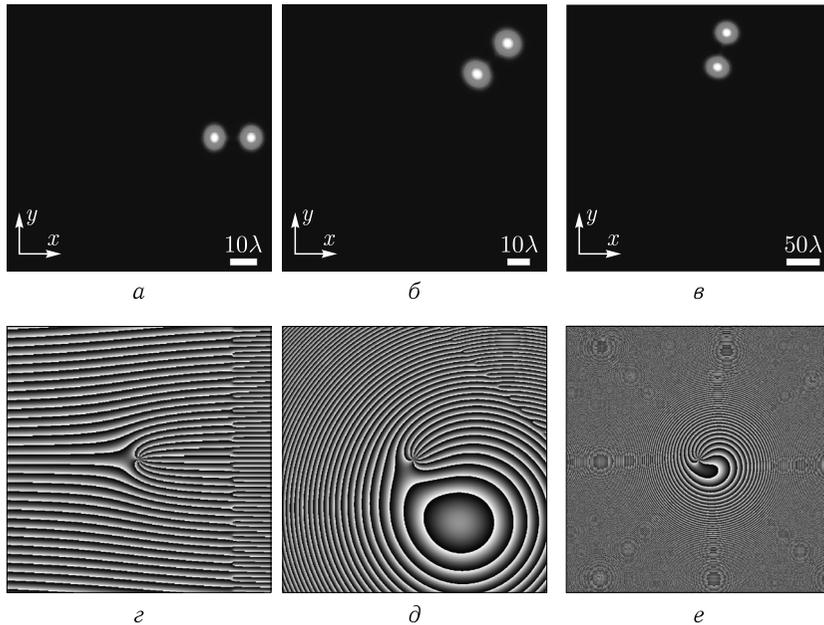


Рис. 4.16. Распределение интенсивности (а–в) и фазы (г–е) аЛГ-пучков при следующих значениях параметров: длина волны $\lambda = 532$ нм, радиус перетяжки $w_0 = 5\lambda$, индекс пучка $(m, n) = (0, 8)$, поперечные смещения первого пучка $x_0 = 5w_0$, $y_0 = 5w_0i$, поперечные смещения второго пучка $x_0 = 8w_0$, $y_0 = 8w_0i$, расстояния вдоль оптической оси $z = 0$ (а, г), $z = z_R \tan(\pi/4)$ (б, д), $z = z_R \tan(5\pi/12)$ (в, е). Размер расчетной области равен $2R$, где $R = 50\lambda$ (а, г), 60λ (б, д), 200λ (в, е)

щения второго пучка $x_0 = 8w_0$, $y_0 = 8w_0i$, расстояния вдоль оптической оси равны $z = 0$ (рис. 4.16, а, г), $z = z_R \tan(\pi/4)$ (рис. 4.16, б, д), $z = z_R \tan(5\pi/12)$ (рис. 4.16, в, е). Размер расчетной области равен $2R$, где $R = 50\lambda$ (рис. 4.16, а, г), 60λ (рис. 4.16, б, д), 200λ (рис. 4.16, в, е).

Из рис. 4.16 видно, что световой пучок, похожий на суперпозицию двух гауссовых пучков, при распространении мало меняет свой вид (изменяясь только масштабно) и поворачивается на угол $\pi/4$ (рис. 4.16, б, д) и $5\pi/12$ (рис. 4.16, в, е).

В этом разделе рассмотрено обобщение хорошо известных лазерных мод Лагерра–Гаусса. Асимметричные пучки Лагерра–Гаусса не обладают модовыми свойствами и имеют асимметричное распределение интенсивности в плоскости, перпендикулярной направлению распространения. При распространении асимметричного пучка ЛГ в однородном пространстве уменьшается асимметрия первого светового кольца и световая энергия перераспределяется в периферийные кольца. Число световых колец совпадает с числом колец стандартной (симметричной) моды ЛГ. Аналитически рассчитана мощность асимметричных пучков ЛГ и проекция их ОУМ на оптическую ось. Установлено, что нормированный ОУМ (ОУМ на фотон) квадратично возрастает с ростом параметра асимметрии, который равен отношению величины смещения по декартовой координате к радиусу перетяжки гауссова пучка. Получены условия, при которых нормированный ОУМ совпадает с топологическим зарядом (как у обычных мод Лагерра–Гаусса). В качестве частного случая рассмотрены аЛГ-пучки с нулевым радиальным индексом, обладающие поперечным сечением интенсивности в форме полумесяца. Получено выражение для координат максимума интенсивности и показано вращение полумесяца при распространении в пространстве. Пучок аЛГ с нулевым радиальным индексом был сформирован с помощью жидкокристаллического пространственного модулятора света. Экспериментально продемонстрировано вращение дифракционной картины интенсивности в сечении пучка (полумесяца) при его распространении. Показана возможность формирования несоосных суперпозиций аЛГ-пучков с распределением интенсивности, близким к гауссову, вращающихся при распространении в пространстве как единое целое. Асимметричные пучки ЛГ в виде полумесяца можно использовать для оптического захвата и перемещения биологических объектов (клеток) [143], так как клетка меньше подвергается тепловому воздействию, чем при захвате в симметричном гауссовом пучке. Также аЛГ-пучки будут полезны в системах квантовой коммуникации для формирования перепутанных по орбитальному моменту фотонов, так как ОУМ аЛГ-пучков может быть не только целым, но и дробным, а дробный ОУМ соответствует фотону в перепутанном состоянии [144].

4.3. Асимметричные вращающиеся пучки Куммера

В [145] рассмотрено семейство гипергеометрических лазерных пучков, комплексная амплитуда которых описывается вырожденной гипергеометрической функцией (функцией Куммера). Функции Куммера активно используются в оптике [146]. Ранее авторы рассматривали асимметричные лазерные пучки Бесселя [138] и Лагерра–Гаусса [147], которые получаются с помощью комплексного смещения аргументов функций комплексного пропускания обычных пучков Бесселя [35] и Лагерра–Гаусса [47]. Заметим, что все упомянутые лазерные пучки являются примерами оптических вихрей и обладают орбитальным угловым моментом (ОУМ). Подход формирования асимметричных лазерных вихревых пучков [138, 147] был позднее развит в работах других авторов [148–151]. Асимметричные лазерные пучки используются в квантовой информатике для накачки нелинейных кристаллов и формирования методом спонтанной конверсии пары перепутанных фотонов с широким ОУМ-спектром [152].

В этом разделе получены аналитические выражения для комплексной амплитуды асимметричного пучка Куммера, также имеющего вид полумесца и вращающегося при распространении, и для ОУМ, нормированного на полную мощность. Математически асимметричные пучки Куммера — это четырехпараметрическое семейство функций, являющихся точным решением параболического уравнения распространения (параксиального уравнения Гельмгольца). Поэтому ОУМ таких пучков зависит от четырех параметров, два из которых целые, а два других действительные. Эти параметры позволяют варьировать ОУМ пучка Куммера в широких пределах.

4.3.1. Смещенные пучки Куммера. Кратко напомним выражения для несмещенных гипергеометрических пучков (пучков Куммера) [145]. Комплексная амплитуда в начальной плоскости при $z = 0$ имеет вид

$$E(r, \varphi, z = 0) = \left(\frac{r}{w}\right)^{m+i\gamma} \exp\left(in\varphi - \frac{r^2}{w^2}\right), \quad (4.63)$$

где (r, φ, z) — цилиндрические координаты, w — радиус перетяжки гауссова пучка, n — топологический заряд оптического вихря (целое число), m, γ — целое и действительное числа, параметр γ задает силу логарифмического аксикона, так как $(r/w)^{i\gamma} = \exp[i\gamma \ln(r/w)]$. Выражение для комплексной амплитуды при любом $z > 0$ можно получить с помощью преобразования Френеля [145]:

$$E(r, \varphi, z) = \frac{(-i)^{n+1}}{n!} \left(\frac{m+n+2+i\gamma}{2}\right) \left(\frac{z_0}{zq(z)}\right) \times$$

$$\times q^{-(m+i\gamma)/2}(z) \exp\left(in\varphi + \frac{ikr^2}{2z}\right) \times \\ \times x^{n/2} {}_1F_1\left(\frac{m+n+2+i\gamma}{2}, n+1, -x\right), \quad (4.64)$$

где $z_0 = kw^2/2$, $q(z) = 1 - iz_0/z$, $x = [kwr/(2z\sqrt{q(z)})]^2$.

Для получения асимметричного пучка Куммера аргументы комплексной амплитуды (x, y) надо сместить в комплексную плоскость. Понятно, что смещение на действительную величину не приведет к изменению вида пучка и его ОУМ. Ограничимся смещением вида: $x \rightarrow x - aw$, $y \rightarrow y - iaw$, где a — безразмерная действительная величина. При таком смещении оптический вихрь не изменяется: $(x + iy)^n = [(x - aw) + i(y - iaw)]^n$. Тогда вместо (4.63) запишем комплексную амплитуду смещенного пучка Куммера в начальной плоскости:

$$E_s(r, \varphi, z = 0) = \frac{(x + iy)^n}{w^n} \left(\frac{s}{w}\right)^{m-n+i\gamma} \exp\left(-\frac{s^2}{w^2}\right), \quad (4.65)$$

где $s^2 = (x - aw)^2 + (y - iaw)^2$.

Из (4.65) видно, что при $\gamma = 0$ смещение в начальной плоскости приводит к появлению двух точек фазовой сингулярности: оптический вихрь с центром в точке $(0, 0)$ и с топологическим зарядом $(m+n)/2$ и оптический вихрь с центром в точке $(2aw, 0)$ и с топологическим зарядом $(n-m)/2$. При $\gamma \neq 0$ в этих же точках возникают две амплитудные сингулярности, поскольку ноль не может возводиться в мнимую степень.

Далее вместо (4.64) запишем комплексную амплитуду смещенного пучка Куммера при любом z :

$$E_s(r, \varphi, z) = \frac{(-i)^{n+1}}{n!} \left(\frac{z_0}{zq(z)}\right) q^{-(m+i\gamma)/2}(z) \times \\ \times \Gamma\left(\frac{m+n+2+i\gamma}{2}\right) \left(\frac{kwr}{2z\sqrt{q(z)}}\right)^n \times \\ \times \exp\left(in\varphi + \frac{iks^2}{2z}\right) {}_1F_1\left(\frac{m+n+2+i\gamma}{2}, n+1, -\xi\right), \quad (4.66)$$

где $s^2 = r(r - 2awe^{i\varphi})$, $\xi = [kws/(2z\sqrt{q(z)})]^2$.

Из (4.66) видно, что амплитуда смещенного пучка Куммера имеет в качестве множителя r^n и поэтому равна нулю при $r = 0$. То есть на оптической оси ($r = 0$) имеет место n -кратно вырожденный ноль интенсивности, вокруг которого распространяется оптический вихрь с топологическим зарядом n . То есть, несмотря на смещение пучка

Куммера, точка сингулярности осталась в центре системы координат на оптической оси. Приравняем комплексный аргумент функции Куммера в (4.66) к комплексному значению корня $\gamma_p = a_p + ib_p$, $p = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$ (${}_1F_1(a, c, \gamma_p) = 0$). Асимптотика корней функции Куммера получена в [153]:

$$\gamma_p \approx 2\pi ip + \left(1 + \frac{c-2a}{2\pi ip}\right) \left[(c-2a) \log 2\pi |p| + \log \frac{(a)}{(c-a)} \pm i \frac{\pi}{2}(c-2) \right] + \frac{2a(a-c)-c}{2\pi ip} + O\left(\frac{\log |p|}{p^2}\right), \quad p \rightarrow \pm\infty. \quad (4.67)$$

Из (4.67) следует, что при $c = 2a$ корни функции Куммера чисто мнимые. Уместно здесь напомнить, как связана функция Куммера с присоединенными многочленами Лагерра и функциями Бесселя:

$$L_n^m(x) = \binom{n+m}{n} {}_1F_1(-n, m+1, x), \quad (4.68)$$

$$J_\nu(x) = \Gamma^{-1}(1+\nu) (x/2)^\nu e^{ix} {}_1F_1(\nu+1/2, 2\nu+1, -2ix).$$

Таким образом, асимметричный пучок Куммера является обобщением асимметричных пучков Бесселя и Лагерра-Гаусса.

Приравняв аргумент функции Куммера в (4.66) значению корня (4.67), получим два уравнения для координат изолированных нулей интенсивности асимметричного пучка Куммера:

$$\begin{cases} y_p = -\frac{z}{akw} \left(a_p - \frac{z}{z_0} b_p\right), \\ x_p = aw \pm \left[a^2 w^2 - \left(\frac{2z}{kw}\right)^2 \left(a_p + \frac{z_0}{z} b_p\right) - \left(\frac{z}{akw}\right)^2 \left(a_p - \frac{z}{z_0} b_p\right)^2 \right]^{1/2}. \end{cases} \quad (4.69)$$

Два знака в выражении для координат x_p объясняются тем, что при $z = 0$ из (4.65) следует, что у интенсивности имеется два нуля на горизонтальной оси при $x = 0$ и при $x = aw$. Из (4.69) следует, что в дальней зоне дифракции (при больших $z \gg z_0$) нули асимметричного пучка Куммера будут иметь координаты:

$$\begin{cases} y_p = \frac{z^2 b_p}{akwz_0}, \\ x_p = \pm \frac{z^2 b_p}{akwz_0} - i. \end{cases} \quad (4.70)$$

Но, как сами нули смещенного пучка Куммера, так и их координаты комплексные, и в распределении интенсивности эти нули проявляются в виде локальных минимумов и не формируют дополнительных точек сингулярности. В дальней зоне аргумент ξ функции Куммера в (4.66) стремится к нулю, а сама функция поэтому стремится к единице.

Из (4.66) видно, что в этом случае остается только один ноль интенсивности — на оптической оси ($r = 0$). Это означает, что при распространении от начальной плоскости к дальней зоне два оптических вихря с топологическими зарядами $(m+n)/2$ и $(n-m)/2$ преобразуются в один вихрь с суммарным зарядом n .

Из (4.70) видно, что координаты комплексных нулей интенсивности (минимумов интенсивности) определяются только мнимой частью b_p комплексных корней функции Куммера γ_p . Также из (4.70) следует, что вся картина распределения интенсивности в поперечном сечении асимметричного пучка Куммера поворачивается в дальней зоне дифракции против часовой стрелки на 45 градусов.

На основе (4.66) запишем интенсивность асимметричного пучка Куммера:

$$I_s(r, \varphi, z) = \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{z_0}{z}\right)^{2n+2} \left(1 + \frac{z_0^2}{z^2}\right)^{-\frac{n+m+2}{2}} \times \left| \Gamma\left(\frac{m+n+2+i\gamma}{2}\right) \right|^2 \exp\left(2\frac{k}{z} awr \sin \varphi\right) \times \exp\left[\gamma \arctg\left(\frac{z_0}{z}\right)\right] \left(\frac{r}{w}\right)^{2n} \left| {}_1F_1\left(\frac{m+n+2+i\gamma}{2}, n+1, -\xi\right) \right|^2. \quad (4.71)$$

Так как аргумент у экспоненты и у функции Куммера в (4.71) зависит и от r , и от φ , распределение интенсивности (4.71) не обладает осевой симметрией и имеет вид полумесяца, растущего при $a > 0$, или убывающего при $a < 0$. При $z = 0$ полумесяц интенсивности имеет симметрию относительно оси x , и при увеличении z поворачивается по часовой стрелке (при $a > 0$).

4.3.2. Орбитальный угловой момент асимметричного пучка Куммера. Орбитальный угловой момент (ОУМ) паракиального пучка рассчитывается по формуле

$$J_z = \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E(x, y) \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right) E^*(x, y) dx dy, \quad (4.72)$$

где Im — мнимая часть числа, E^* — сопряжение комплекснозначной функции E , а полная мощность пучка рассчитывается по формуле:

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E(x, y) E^*(x, y) dx dy. \quad (4.73)$$

Так как и ОУМ и мощность сохраняются при распространении пучка, то их можно рассчитывать в любой поперечной плоскости.

Например, рассчитывая ОУМ в начальной плоскости, получим

$$\frac{J_z}{W} = n + \left(\frac{2a}{w}\right) \frac{W_1}{W} + \gamma aw \frac{W_2}{W} + (m-n)aw \frac{2awW_3 - W_4}{W}, \quad (4.74)$$

где

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} L_{m,n} dx dy,$$

$$W_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x L_{m,n} dx dy,$$

$$W_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{x^2 + y^2} L_{m,n+2} dx dy,$$

$$W_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + y^2} L_{m,n+2} dx dy,$$

$$W_4 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2 + y^2} L_{m,n+2} dx dy,$$

$$\begin{aligned} L_{m,n} = \frac{1}{w^{2m}} \exp \left[-\frac{2}{w^2} (x^2 - 2awx + y^2) \right] \times \\ \times \left[(x^2 - 2awx + y^2)^2 + (2awy)^2 \right]^{(m-n)/2} \times \\ \times (x^2 + y^2)^n \exp \left[\gamma \operatorname{arctg} \left(\frac{2awy}{x^2 - 2awx + y^2} \right) \right]. \quad (4.75) \end{aligned}$$

Правая часть (4.74) имеет четыре слагаемых, каждое из которых может быть как положительным, так и отрицательным, в зависимости от знаков ($a > 0$): $n, \gamma, (m-n)$. То есть у асимметричного пучка Куммера ОУМ может быть, как больше, так и меньше, чем у симметричного пучка ($J_z/W = n$). Из (4.74) следует, что при отсутствии смещения ($a = 0$) нормированный на мощность пучка Куммера ОУМ равен топологическому заряду n . При $m = n$ и $\gamma = 0$ из (4.74) следует,

что ОУМ равен

$$\begin{aligned} \frac{J_z}{W} = n + \left(\frac{2a}{w}\right) \frac{W_1}{W}, \\ W_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x L_n dx dy, \quad W = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} L_n dx dy, \quad (4.76) \\ L_n = \exp \left[-\frac{2(x-aw)^2}{w^2} - \frac{2(y^2 - a^2w^2)}{w^2} \right] (x^2 + y^2)^n. \end{aligned}$$

Из (4.76) следует, что ОУМ при смещении увеличивается пропорционально смещению $a > 0$, а также пропорционально первому моменту интенсивности. Второе слагаемое в (4.76) всегда положительно.

4.3.3. Численное моделирование. На рис. 4.17 и 4.18 показаны распределения интенсивности и фазы двух асимметричных пучков Куммера в начальной плоскости ($z = 0$) и после распространения в свободном пространстве. При расчетах использовались следующие значения параметров: длина волны $\lambda = 532$ нм, радиус перетяжки гауссова пучка $w = 500$ мкм, топологический заряд оптического вихря $n = 1$, параметр асимметрии $a = 0,2$ (рис. 4.17) и $a = -0,2$ (рис. 4.18), показатель амплитудной степенной составляющей $m = 3$, параметр логарифмического аксикона $\gamma = 0$, расстояние распространения в пространстве $z = 2$ м, расчетная область $-R \leq x, y \leq R$ ($R = 4$ мм).

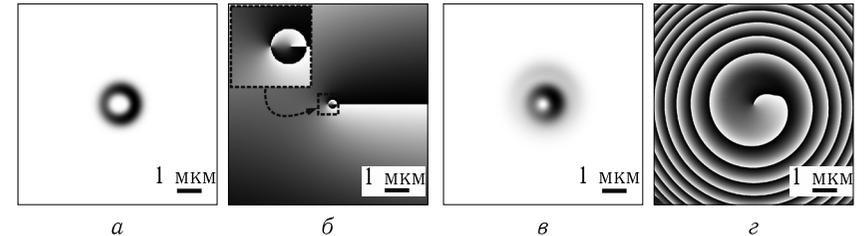


Рис. 4.17. Распределения интенсивности (a, v) (негатив) и фазы (b, z) (черный цвет -0 , белый цвет -2π) асимметричного пучка Куммера ($a = 0,2$) в начальной плоскости $z = 0$ (a, b) и после распространения в свободном пространстве (v, z)

На вставке в рис. 4.17, b и 4.18, b видно, что в начальной плоскости имеется два оптических вихря: вихрь с топологическим зарядом $(m+n)/2 = 2$ в центре и с топологическим зарядом $(n-m)/2 = -1$ справа на рис. 4.17 (и слева на рис. 4.18). На рис. 4.17, v и 4.18, v видно, что при распространении полумесяц интенсивности повернулся на 45 градусов против часовой стрелки, как и предсказывалось теорией, а на рис. 4.17, z и 4.18, z видно, что действительно два вихря

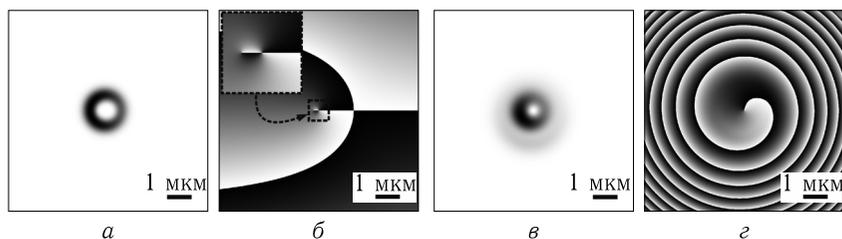


Рис. 4.18. Распределения интенсивности (a, v) (негатив) и фазы (b, z) (черный цвет — 0, белый цвет — 2π) асимметричного пучка Куммера ($l = -0, 2$) в начальной плоскости $z = 0$ (a, b) и после распространения в свободном пространстве (v, z)

с топологическими зарядами $+2$ и -1 в дальней зоне преобразовались в один вихрь с зарядом $+1$.

В этом разделе получены точные выражения для комплексной амплитуды и для орбитального углового момента асимметричных пучков Куммера, скалярная комплексная амплитуда которых пропорциональна функции Куммера (вырожденной гипергеометрической функции). Эти пучки являются точным решением параксиального уравнения распространения (уравнения типа Шредингера) и получаются из обычных симметричных гипергеометрических пучков путем комплексного смещения аргументов. При распространении аПК слабо изменяют свою интенсивность и вращаются вокруг оптической оси. Эти пучки пример вихревых лазерных пучков с дробным орбитальным угловым моментом (ОУМ), величина которого зависит от 4х параметров: топологического заряда вихря, величины смещения, параметра логарифмического аксикона и степени радиального сомножителя. Изменяя эти параметры, можно управлять ОУМ пучка: непрерывно увеличивать или уменьшать его.

Глава 5

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ВРАЩАЮЩИЕСЯ ПУЧКИ

5.1. Гауссов пучок с внедренным эллиптическим вихрем

Оптические вихри, не обладающие радиальной симметрией и имеющие дробный орбитальный угловой момент (ОУМ), интенсивно изучаются в последние несколько лет. Это связано с тем, что оптические вихри с дробным ОУМ используются в квантовой информатике для генерации фотонов в перепутанных состояниях по ОУМ [144, 154, 155]. При этом достигается максимальная степень защищенности квантовой линии связи.

Получить оптический вихрь с дробным ОУМ можно разными путями. Например, с помощью смещения центра гауссова пучка из центра спиральной фазовой пластинки [156]. Или с помощью формирования асимметричных оптических вихрей с распределением интенсивности в виде полумесяца [138, 147]. Но в этом случае траектория, по которой будут вращаться микрочастицы, будет разомкнута. Интересно рассмотреть случай, когда и ОУМ дробный и кривая интенсивности вихревого пучка в поперечной плоскости замкнута. Проще всего это сделать с помощью формирования эллиптического оптического вихря. В [157] исследуется трансформация оптического вихря с помощью внесения в него разной степени эллиптичности. Эта работа [157] продолжает более ранние работы по исследованию эллиптических оптических вихрей [89, 158]. Но в [89, 157, 158] не исследовался ОУМ эллиптических вихрей. Ближе всего к данной работе работа [159]. В [159] рассмотрен эллиптический вихревой пучок Эрмита–Гаусса и рассчитан его ОУМ, который оказался дробным. Однако, чтобы на практике сформировать такой пучок, надо использовать эллиптический гауссов пучок в качестве падающего на амплитудно-фазовый оптический элемент. Но совмещение в одном элементе заданных амплитуды и фазы составляет трудную задачу.

В данном разделе рассмотрена задача, которая просто реализуется на практике, по сравнению с [159]. Получена формула для ОУМ

гауссова пучка, в который внедрен эллиптический оптический вихрь с n -кратно вырожденным нулем интенсивности на оптической оси (в центре гауссова пучка). В отличие от [159], где ОУМ возростал, если увеличивалась степень эллиптичности гауссова пучка, в данной работе ОУМ, наоборот, уменьшается с ростом степени эллиптичности внедренного оптического вихря. Отличие рассмотренного в данной работе оптического вихря от вихря в [159] еще в том, что в [159] пучок сохраняет при распространении свой вид (с точностью до масштаба), и в любой поперечной плоскости его распределение интенсивности имеет вид эллипса с n изолированными нулями. Вихревой пучок, рассмотренный в данной работе, также имеет распределение интенсивности в виде эллипса, который вращается при распространении, и у которого нули интенсивности, лежащие на большой оси эллипса, проявляются только в фокальной плоскости сферической линзы.

5.1.1. Вычисление орбитального углового момента. Рассмотрим изолированный n -кратно вырожденный эллиптический ноль интенсивности, расположенный в начале координат, и описываемый функцией

$$T(x, y) = (\alpha x + iy)^n, \quad (5.1)$$

где n — целый топологический заряд оптического вихря, α — безразмерный параметр, задающий эллиптичность нуля интенсивности: если $\alpha < 1$, то эллипс интенсивности вблизи нуля вытянут вдоль оси x , если $\alpha > 1$ — то вдоль оси y , если $\alpha < 0$, то фаза оптического вихря вращается при распространении по часовой стрелке, если $\alpha > 0$ — то против часовой.

Пусть ноль интенсивности (5.1) внедрен в перетяжку гауссова пучка так, что комплексная амплитуда светового поля в начальной плоскости имеет вид

$$E(x, y, z = 0) = (\alpha x + iy)^n \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2w^2}\right), \quad (5.2)$$

где w — радиус перетяжки гауссова пучка. Найдем орбитальный угловой момент (ОУМ) и мощность (энергию) параксиального поля по известным формулам [147, 156]:

$$J_z = \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{E}(x, y) \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) E(x, y) dx dy, \quad (5.3)$$

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{E}(x, y) E(x, y) dx dy, \quad (5.4)$$

где Im — мнимая часть комплексного числа, \bar{E} — сопряженная комплексная амплитуда. Вместо (5.3) и (5.4) для поля (5.2) получим:

$$J_z = \alpha n \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w^2}\right) (\alpha^2 x^2 + y^2)^{n-1} (x^2 + y^2) dx dy, \quad (5.5)$$

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w^2}\right) (\alpha^2 x^2 + y^2)^n dx dy. \quad (5.6)$$

Из (5.5) и (5.6) следует, что при отсутствии эллиптичности нуля интенсивности ($\alpha = 1$), получается хорошо известный нормированный ОУМ, равный топологическому заряду вихря:

$$\frac{J_z}{W} = n. \quad (5.7)$$

Если $\alpha = -1$, то знак в (5.7) меняется на противоположный: $J_z/W = -n$. Интегралы (5.5) и (5.6) можно вычислить с помощью интеграла

$$I_m = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w^2}\right) (\alpha^2 x^2 + y^2)^m dx dy, \quad (5.8)$$

так как ОУМ (5.5) и мощность (5.6) связаны с интегралом (5.8) простыми соотношениями:

$$J_z = -\alpha n \frac{\partial}{\partial (w^{-2})} I_{m=n-1}, \quad W = I_{m=n}. \quad (5.9)$$

Интеграл (5.8) вычисляется с помощью разложения по биному Ньютона

$$(\alpha x + iy)^n = \sum_{l=0}^n \frac{n!}{l!(n-l)!} (\alpha x)^l (iy)^{n-l} \quad (5.10)$$

и использования простого интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2l} \exp(-px^2) dx = \sqrt{\pi} 2^{-l} (2l-1)!! p^{-(2l+1)/2}, \quad (5.11)$$

где $(2l-1)!!$ — факториал только по нечетным целым числам. Применяя (5.10) и (5.11) к интегралу (5.8) и с учетом (5.9), вместо (5.5) и (5.6) получим:

$$J_z = \frac{\pi \alpha n^2 w^{2n+2}}{2^{n-1}} A_{n-1}, \quad W = \frac{\pi w^{2n+2}}{2^n} A_n, \quad (5.12)$$

где

$$A_n = \sum_{l=0}^n \frac{n! (2l-1)!! (2n-2l-1)!!}{l! (n-l)!} \alpha^{2l}. \quad (5.13)$$

Из (5.12) следует, что нормированный ОУМ поля (5.2) имеет вид:

$$\frac{J_z}{W} = \frac{2\alpha n^2 A_{n-1}}{A_n}. \quad (5.14)$$

Из (5.14) сложно сделать определенные выводы, поэтому приведем несколько более простых выражений для нормированного ОУМ для топологических зарядов $n = 1, 2, 3$:

$$\left. \frac{J_z}{W} \right|_{n=1} = \frac{2\alpha}{1 + \alpha^2}, \quad (5.15)$$

$$\left. \frac{J_z}{W} \right|_{n=2} = \frac{8\alpha (1 + \alpha^2)}{3 + 2\alpha^2 + 3\alpha^4}, \quad (5.16)$$

$$\left. \frac{J_z}{W} \right|_{n=3} = \frac{18\alpha (3 + 2\alpha^2 + 3\alpha^4)}{15 + 9\alpha^2 + 9\alpha^4 + 15\alpha^6}. \quad (5.17)$$

Из (5.15)–(5.17) видно, что ОУМ эллиптического вихря (5.2) дробный и меньше топологического заряда и при $\alpha < 1$, и при $\alpha > 1$. То есть без доказательства можно записать, что ($\alpha > 0$):

$$\frac{J_z}{W} = \frac{2\alpha n^2 A_{n-1}}{A_n} \leq n. \quad (5.18)$$

Причем равенство в (5.18) достигается при $\alpha = 1$. Физически объяснить, почему ОУМ уменьшается при замене обычного радиально-симметричного вихря на эллиптический вихрь (5.1), можно следующим образом. Там, где оптический вихрь удлиняется, он попадает в область меньшей амплитуды гауссова пучка, и вклад этой «удлиненной» части оптического вихря в общий ОУМ уменьшается. Из (5.15)–(5.17) также следует, что при определенных значениях α ОУМ становится равным целому числу $m < n$. То есть, меняя степень эллиптичности изолированного нуля интенсивности (5.1) α от 0 до 1, можно получить оптический вихрь с любым нормированным ОУМ от 0 до n .

5.1.2. Вычисление комплексной амплитуды поля. Комплексную амплитуду светового поля (5.2) на произвольном расстоянии z можно вычислить с помощью преобразования Френеля. Добавим к полю (5.2) пропускание тонкой сферической линзы в параксиальном приближении:

$$F(x, y) = \exp \left[-\frac{ik}{2f} (x^2 + y^2) \right], \quad (5.19)$$

где f — фокусное расстояние тонкой линзы, k — волновое число. Тогда комплексная амплитуда эллиптического гауссова вихря (5.2) после

сферической линзы (5.19) будет вычисляться с помощью интегрального выражения

$$E(\xi, \eta, z) = \left(\frac{-ik}{2\pi z} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E(x, y, z=0) F(x, y) \times \\ \times \exp \left[\frac{ik}{2z} \left\{ (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 \right\} \right] dx dy. \quad (5.20)$$

Интеграл (5.20) можно вычислить с помощью суммы (5.10) и двух справочных соотношений [103]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^m \exp(-Ax^2 - Bx) dx = \\ = \sqrt{\pi} \left(\frac{i}{2} \right)^m A^{-(m+1)/2} \exp \left(\frac{B^2}{4A} \right) H_m \left(\frac{iB}{2\sqrt{A}} \right), \quad (5.21)$$

$$\sum_{l=0}^m \frac{m! t^l}{l! (m-l)!} H_l(x) H_{m-l}(y) = (1+t^2)^{m/2} H_m \left(\frac{tx+y}{\sqrt{1+t^2}} \right), \quad (5.22)$$

где $H_m(x)$ — многочлен Эрмита. Тогда вместо (5.20) получим ($\alpha > 1$):

$$E(\xi, \eta, z) = \left(\frac{-1}{2} \right)^n \left(\frac{-ik}{2z} \right) \left(\frac{\sqrt{2}w}{1 + iz_0/z} \right)^{n+2} \times \\ \times \exp \left[-\frac{\xi^2 + \eta^2}{P^2} + \frac{ik}{2S} (\xi^2 + \eta^2) \right] \times \\ \times (1 - \alpha^2)^{n/2} H_n(Q(R + iI)), \quad (5.23)$$

где

$$P = \frac{\sqrt{2}wz}{z_0} \sqrt{1 + \frac{z_0^2}{z^2}}, \quad S = z \left[1 + \left(\frac{z}{z_1} \left(1 + \frac{z_1^2}{z_0^2} \right) \right)^{-1} \right]^{-1}, \quad (5.24)$$

$$z_1 = \frac{zf}{z-f}, \quad z_0 = kw^2,$$

$$Q = \frac{kw}{\sqrt{2}z} (\alpha^2 - 1)^{-1/2} \left(1 + \frac{z_0^2}{z_1^2} \right)^{-1/4},$$

$$I = \eta \cos \psi - \alpha \xi \sin \psi, \quad R = -\alpha \xi \cos \psi - \eta \sin \psi,$$

$$\psi = \frac{1}{2} \arctg \left(\frac{z_0}{z_1} \right).$$

Из (5.23) и (5.24) следует, что аргумент многочлена Эрмита будет действительный только на некоторой прямой в поперечной плоскости, удовлетворяющей уравнению

$$\eta = \alpha \xi \operatorname{tg}(\psi). \quad (5.25)$$

Из (5.25) следует, что при $z = 0$ получим $z_1 = 0$ и $\psi = \pi/2$, т.е. наклон прямая (5.25) вертикальна. И наоборот, при $z = f$ получим $z_1 \rightarrow \infty$ и $\psi = 0$, т.е. прямая (5.25) горизонтальна. При других расстояниях $0 < z < f$ прямая (5.25) постепенно поворачивается из вертикального положения в горизонтальное. На этой прямой, на которой аргумент многочлена Эрмита действительный, лежат корни многочлена Эрмита (нули интенсивности поля (5.23)). Приравняв действительную часть аргумента многочлена Эрмита в (5.23) значению корня γ_n , где $H_n(\gamma_n) = 0$, и учтя (5.25), получим уравнение для координат нулей интенсивности по горизонтальной оси ξ (координаты нулей по вертикальной оси следуют из (5.25)):

$$\xi_n = -\frac{\sqrt{2} \gamma_n z \sqrt{\alpha^2 - 1} \left(1 + \frac{z_0^2}{z_1^2}\right)^{1/4}}{\alpha k w} \cos(\psi). \quad (5.26)$$

Из (5.26) следует, что при $\alpha = 1$ у функции (5.23) только один нуль интенсивности $\xi_n = 0$. При малом z и $\alpha > 1$ нули интенсивности (5.26) расположены близко к друг другу. Максимальное расстояние между корнями (5.26) в фокусе линзы при $z = f$:

$$\xi_n = -\frac{\sqrt{2} \gamma_n f \sqrt{\alpha^2 - 1}}{\alpha k w}. \quad (5.27)$$

Из (5.27) следует, что расстояние между нулями интенсивности поля (5.23), лежащими на горизонтальной прямой в фокальной плоскости сферической линзы (5.19), зависит от величины эллиптичности оптического вихря α . При $\alpha = 1$ расстояние между нулями интенсивности равно нулю, а при $\alpha \rightarrow \infty$ оно максимальное и равно

$$\xi_n = -\frac{\sqrt{2} \gamma_n f}{k w}. \quad (5.28)$$

Заметим, что если в качестве параметра эллиптичности оптического вихря (5.1) выбрать обратную величину $\beta = 1/\alpha$, то вместо (5.27) получим выражение

$$\xi_n = -\frac{\sqrt{2} \gamma_n f \sqrt{1 - \beta^2}}{k w}, \quad (5.29)$$

из которого следует, что при $\beta = 1$ расстояние между нулями интенсивности равно нулю (имеется только один нуль в начале координат в фокальной плоскости линзы), а при $\beta = 0$ расстояние между нулями максимальное и равно (5.28).

5.1.3. Эксперимент по формированию эллиптического гауссова вихря. В эксперименте линейно поляризованный гауссов пучок с диаметром перетяжки, равным $2w = 2,7$ мм, освещал под углом, близким к нормальному, эллиптическую спиральную фазовую пластинку с пропусканием

$$V(r, \varphi) = \exp(in\varphi), \quad (5.30)$$

где $\varphi = \arctg[(c_y y)/(c_x x)]$. Отношение $c_y/c_x = \beta = 1/\alpha$ принимало значения 0,1; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1. Хотя функция (5.30) отличается от (5.1), но топологический заряд обоих оптических вихрей при равных n и β , одинаковый. Поэтому поведение обоих вихрей похоже.

Схема эксперимента показана на рис. 5.1. В качестве источника излучения был выбран твердотельный лазер L ($\lambda = 532$ нм), формирующий фундаментальный гауссов пучок. Пучок лазера, расширенный и сколиммированный с помощью системы, состоящей из пинхола PH (размер отверстия 40 мкм) и линзы L_1 ($f_1 = 250$ мм), падал на дисплей модулятора SLM (PLUTO VIS, разрешение 1920×1080 пикселей, размер пикселя 8 мкм). Диафрагма D_1 была использована для того, чтобы отделить центральное светлое пятно от окружающих его светлых и темных колец, возникающих при дифракции на пинхоле. Далее с помощью системы линз L_2 ($f_2 = 350$ мм) и L_3 ($f_3 = 150$ мм) и диафрагмы D_2 мы осуществляли пространственную фильтрацию промодулированного по фазе лазерного пучка, отраженного от дисплея модулятора. С помощью линзы L_4 ($f_4 = 500$ мм) лазерный пучок фокусировался на матрице видеокamеры CCD LOMO TC 1000 (размер пикселя $3,34 \times 3,34$ мкм).

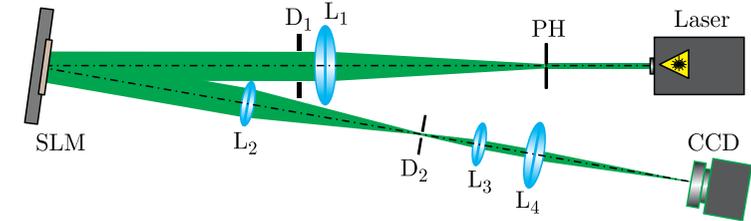


Рис. 5.1. Экспериментальная схема установки: L — твердотельный лазер ($\lambda = 532$ нм), PH — пинхол (размер отверстия 40 мкм), L_1 , L_2 , L_3 и L_4 — линзы с фокусными расстояниями ($f_1 = 250$ мм, $f_2 = 350$ мм, $f_3 = 150$ мм, $f_4 = 500$ мм), D_1 и D_2 — диафрагма, SLM — пространственный модулятор света PLUTO VIS, CCD — видеокamera LOMO TC-1000

На рис. 5.2 показаны фазовые функции спиральных пластинок с разной эллиптичностью β и распределения интенсивности, сформированные ими в фокусе линзы L_4 . Топологический заряд спиральной фазовой пластинки равен $n = 1$. Небольшие отклонения распределения интенсивности, сформированного в случае, когда $\beta = 1$ от идеального

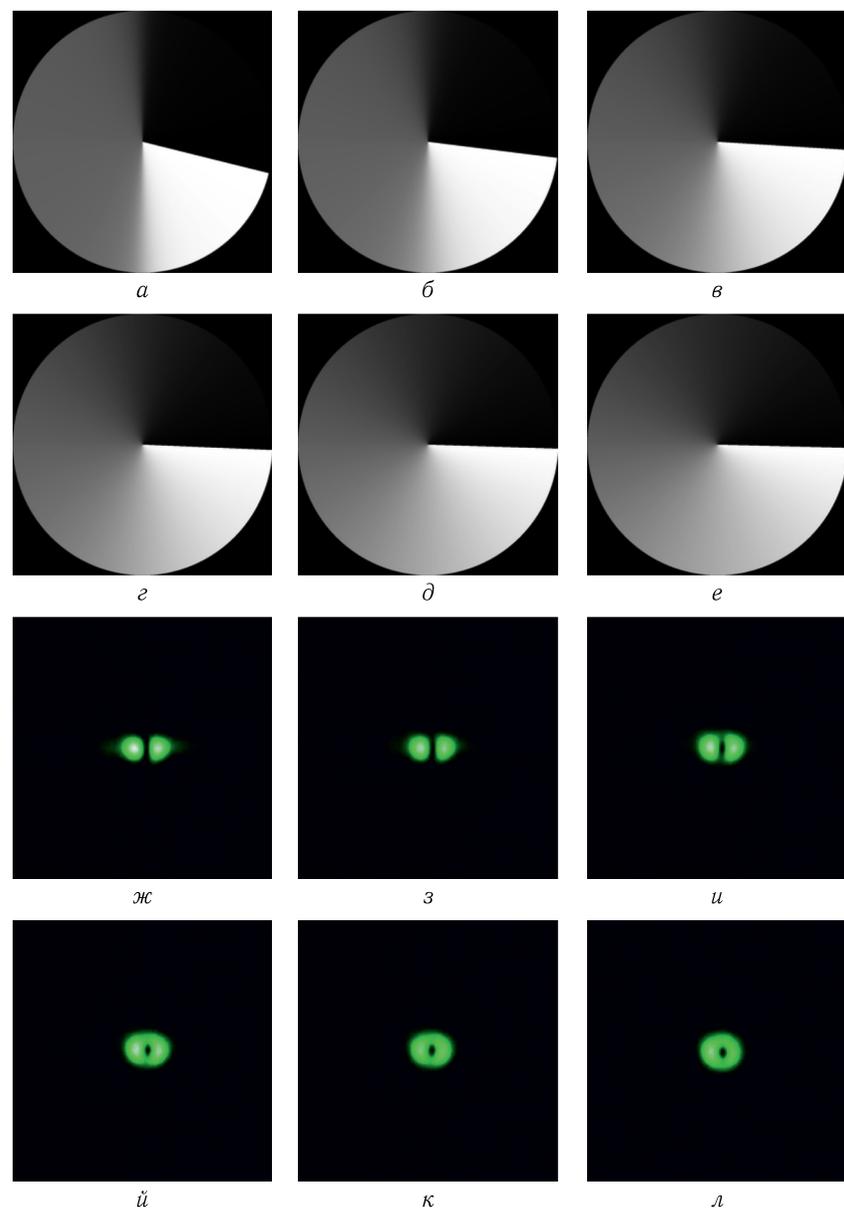


Рис. 5.2. Фазовые функции элементов (а–е) и сформированные распределения интенсивности (ж–л, негатив) в фокусе линзы L_4 для случая использования СФП с топологическим зарядом $n = 1$ и отношением β : 0,1 (а, ж), 0,2 (б, з), 0,4 (в, и), 0,6 (г, й), 0,8 (д, к), 1(е, л). Размер картинок интенсивностей 900 мкм на 900 мкм

кольца, связаны с тем, что свет падает на дисплей модулятора света под небольшим углом к нормали.

На рис.5.3 показаны фазовые функции спиральных пластинок с разной эллиптичностью β и распределения интенсивности, сформированные ими в фокусе линзы L_4 . Топологический заряд спиральной фазовой пластинки равен $n = 2$. Небольшие отклонения распределения интенсивности, сформированного в случае, когда $\beta = 1$, от идеального кольца, связаны с тем, что свет падает на дисплей модулятора света под небольшим углом.

Заметим, что формулы (5.15)–(5.17) инвариантны по отношению к замене параметра β на α . Поэтому, подставив β в (5.16) вместо α , для оптических вихрей, показанных на рис. 5.3, ж–л, получим ОУМ, приведенный в табл. 5.1. На рис. 5.3 видно, что расстояние между двумя нулями интенсивности уменьшается (в соответствии с формулой (5.29)) от рис. 5.3, ж к рис. 5.3, л, а ОУМ, наоборот, растет для пучков на рис. 5.3, ж до рис. 5.3, л (смотри табл. 5.1, строка 3).

Таблица 5.1. Нормированный ОУМ, рассчитанный по формуле (5.16) для эллиптического гауссова вихря с $n = 2$ и разной степенью эллиптичности β

Рис. 5.3	ж	з	и	й	к	л
β	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1
J_z/W	0,26	0,53	1,11	1,56	1,91	2

Интересно отметить, что из табл.5.1 видно, что в промежутке между значениями β от 0,2 до 0,4 будет такое значение β , при котором ОУМ эллиптического гауссова вихря будет равен 1. Но при этом, все равно, у такого оптического вихря в фокальной плоскости линзы будет два нуля интенсивности (а не один), как у всех аналогичных вихрей на рис. 5.3.

На рис.5.4 показаны фазовые функции спиральных пластинок с разной эллиптичностью β и распределения интенсивности, сформированные ими в фокусе линзы L_4 . Топологический заряд спиральной фазовой пластинки равен $n = 3$. Небольшие отклонения распределения интенсивности, сформированного в случае, когда $\beta = 1$ от идеального кольца, связаны с тем, что свет падает на дисплей модулятора света под небольшим углом к нормали.

В табл. 5.2 показаны значения нормированного ОУМ, рассчитанные по формуле (5.17) для эллиптического гауссова вихря с $n = 3$ и разными значениями β . На рис. 5.4 видно, что расстояние между тремя нулями интенсивности уменьшается (в соответствии с формулой (5.29)) от рис. 5.4, ж к рис. 5.4, л, а ОУМ, наоборот, растет для пучков на рис. 5.4, ж до рис. 5.4, л (смотри Таблицу 5.2, строка 3). На рис. 5.4, ж и рис. 5.4, з ясно видно только один центральный ноль, так как два

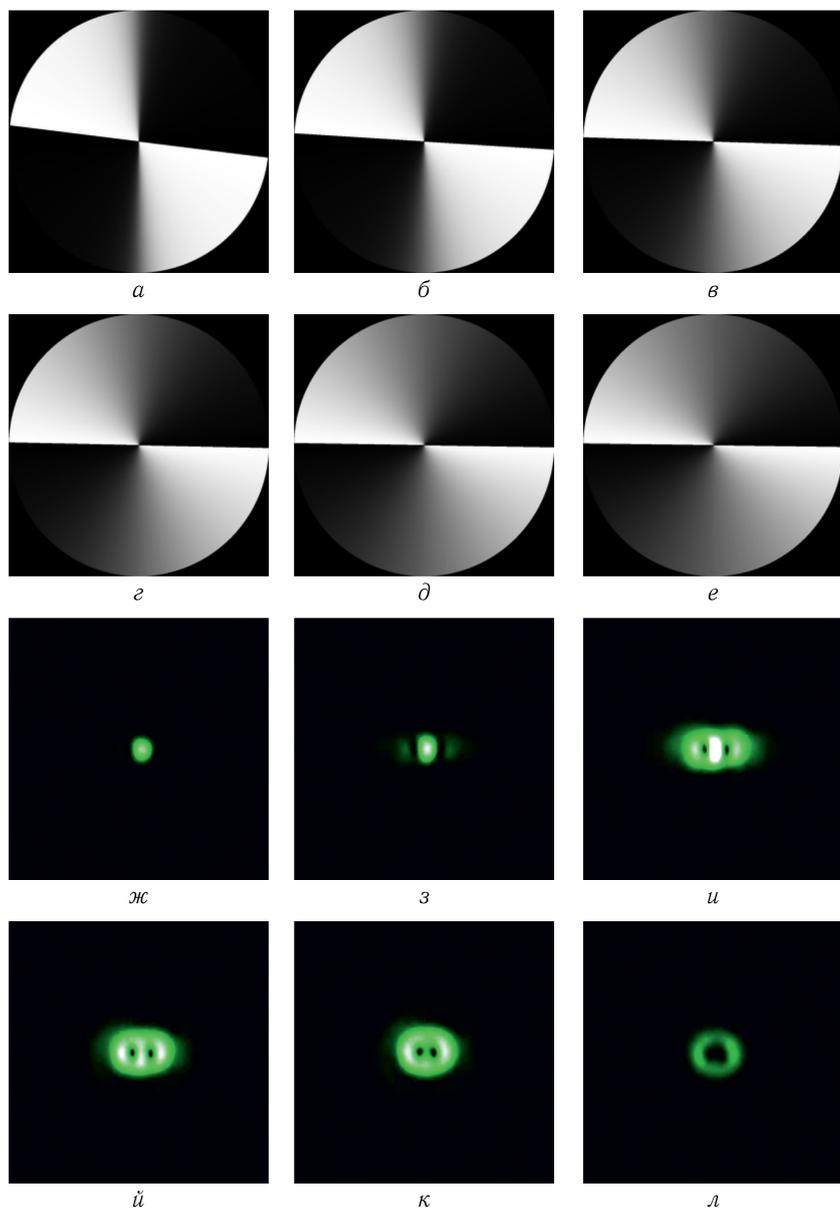


Рис. 5.3. Фазовые функции элементов (а-е) и сформированные распределения интенсивности (ж-л, негатив) в фокусе линзы L_4 для случая использования СФП с топологическим зарядом $n = 2$ и отношением β : 0,1 (ж, а), 0,2 (б, з), 0,4 (в, и), 0,6 (г, й), 0,8 (д, к), 1 (е, л). Размер картинок интенсивностей 900 мкм на 900 мкм

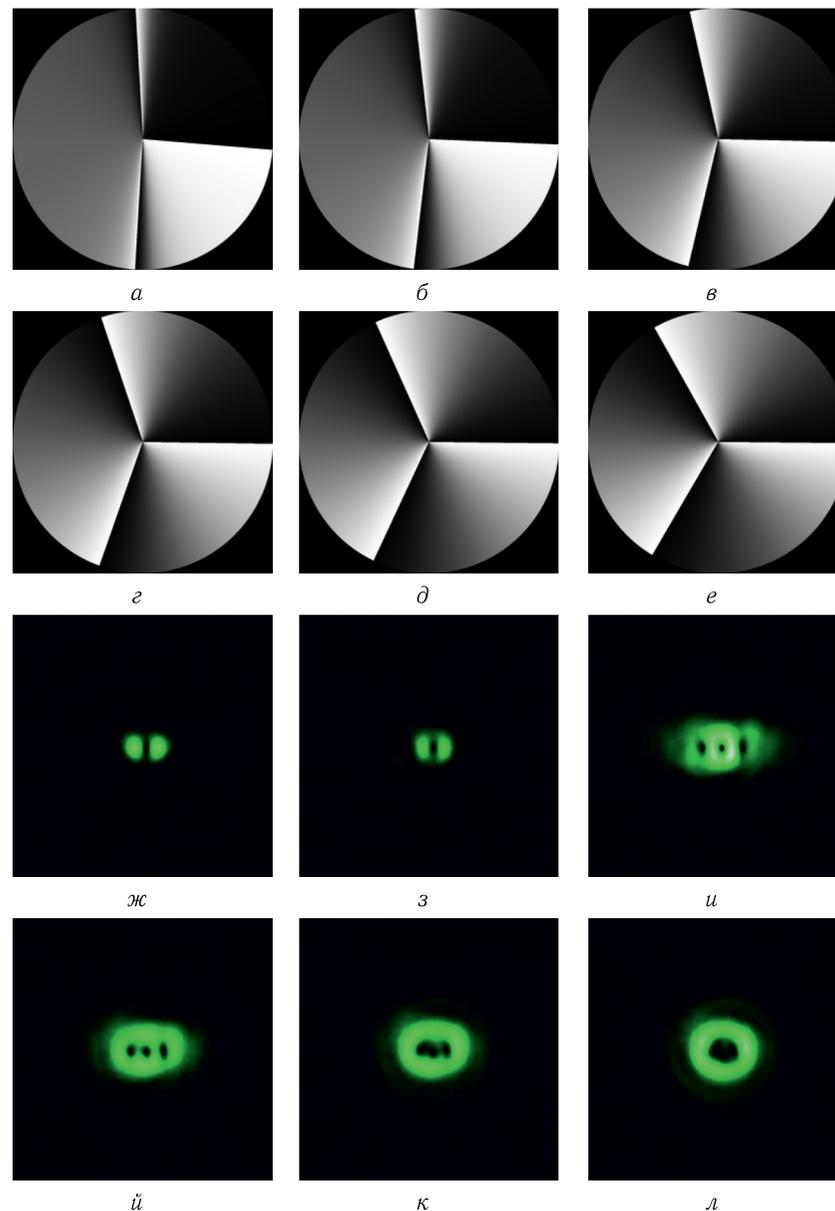


Рис. 5.4. Фазовые функции элементов (а-е) и сформированные распределения интенсивности (ж-л, негатив) в фокусе линзы L_4 для случая использования СФП с топологическим зарядом $n = 3$ и отношением β : 0,1 (а, ж), 0,2 (б, з), 0,4 (в, и), 0,6 (г, й), 0,8 (д, к), 1 (е, л). Размер картинок интенсивностей 900 мкм на 900 мкм

других периферийных нуля интенсивности попадают в область низкой интенсивности гауссова пучка. Они явно видны, начиная с рис. 5.4, *и*. На рис. 5.4, *л* эти три нуля интенсивности объединяются в один ноль обычного оптического вихря с радиальной симметрией.

Таблица 5.2. Нормированный ОУМ, рассчитанный по формуле (5.17) для эллиптического гауссова вихря с $n = 3$ и разной степенью эллиптичности β

Рис. 5.4	<i>ж</i>	<i>з</i>	<i>и</i>	<i>й</i>	<i>к</i>	<i>л</i>
β	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1
J_z/W	0,36	0,72	1,47	2,20	2,97	3

На рис. 5.5 показаны фазовые функции спиральных пластинок с разной эллиптичностью β и распределения интенсивности, сформированные ими в фокусе линзы L_4 . Топологический заряд спиральной фазовой пластинки равен $n = 4$. Небольшие отклонения распределения интенсивности, сформированного в случае, когда $\beta = 1$, от идеального кольца, связаны с тем, что свет падает на дисплей модулятора света под небольшим углом.

Четыре нуля интенсивности в фокусе линзы ясно видны только на рис. 5.5, *и* и рис. 5.5, *й*. На рис. 5.5, *ж* нулей еще не видно, так как они попадают в область низкой интенсивности гауссова пучка. На рис. 5.5, *з* видны только два нуля интенсивности, другие два нуля попадают в область низкой интенсивности. На рис. 5.5, *к* и рис. 5.5, *л* нулей не видно по другой причине: расстояние между ними мало, и их трудно отличить один от другого.

На рис. 5.6 показаны распределения интенсивности эллиптического гауссова вихря с топологическим зарядом $n = 4$ и параметром эллиптичности $\beta = 0,6$, зарегистрированные на разных расстояниях от начальной плоскости (до фокальной плоскости линзы L_4 и после нее).

Из рис. 5.6 видно, что в соответствии с формулой (5.25) большая ось эллипса интенсивности в сечении оптического вихря, оставаясь во втором и четвертом квадрантах, поворачивается при распространении до фокуса из вертикального положения в горизонтальное положение в фокальной плоскости линзы (рис. 5.6, *ж*). После фокуса, наоборот, большая ось эллипса интенсивности поворачивается, оставаясь в первом и третьем квадрантах, из горизонтального положения в вертикальное. Изменение знака наклона прямой в формуле (5.25) происходит из-за изменения знака переменной $z_1 = zf/(z - f)$ при прохождении фокуса и поэтому изменяется знак угла $\psi = \arctg(z_0/z_1)/2$. В соответствии с формулой (5.26) расстояние между четырьмя нулями, лежащими на большой оси эллипса интенсивности, растет и достигает максимума (5.27) в фокальной плоскости линзы (рис. 5.6, *ж*). Поэтому четыре нуля интенсивности отчетливо видны именно в фокальной

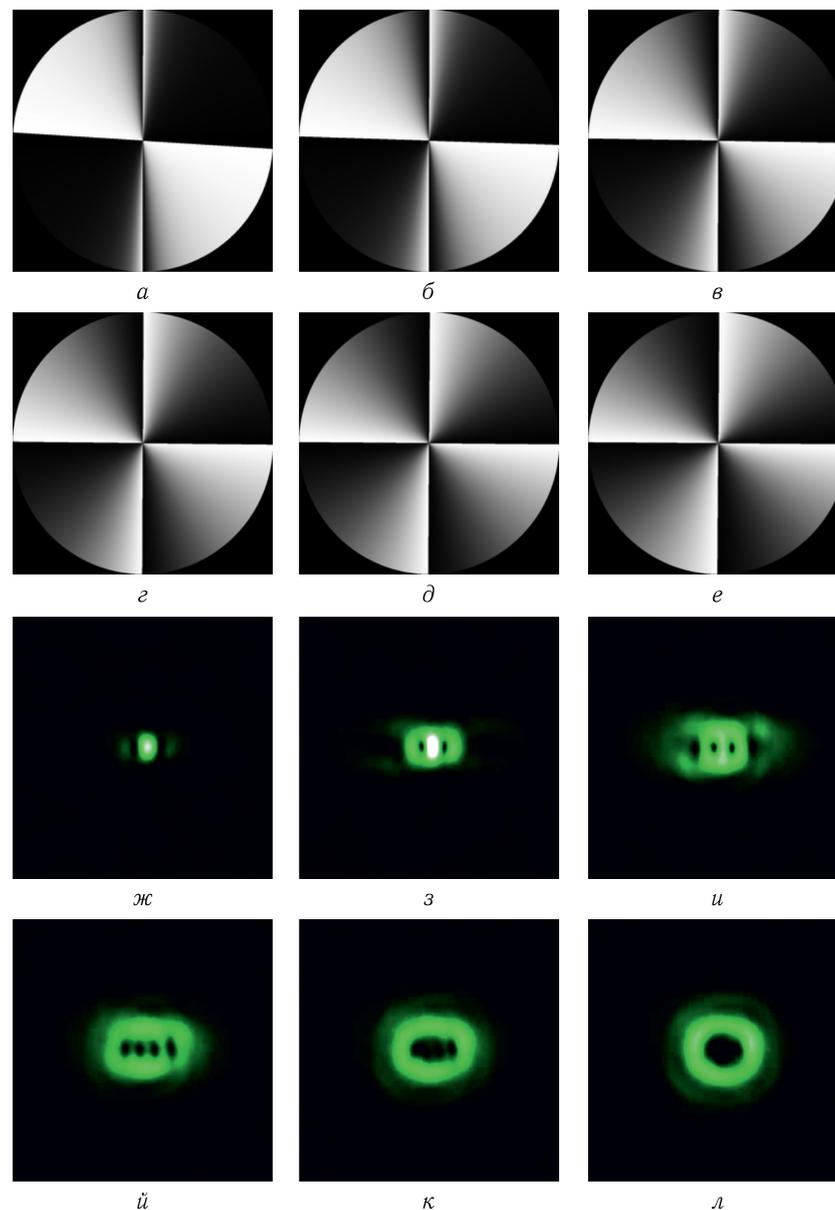


Рис. 5.5. Фазовые функции элементов (*а-е*) и сформированные распределения интенсивности (*ж-л*, негатив) в фокусе линзы L_4 для случая использования СФП с топологическим зарядом $n = 4$ и отношением β : 0,1 (*а, ж*), 0,2 (*б, з*), 0,4 (*в, и*), 0,6 (*г, й*), 0,8 (*д, к*), 1 (*е, л*). Размер картинок интенсивностей 900 мкм на 900 мкм

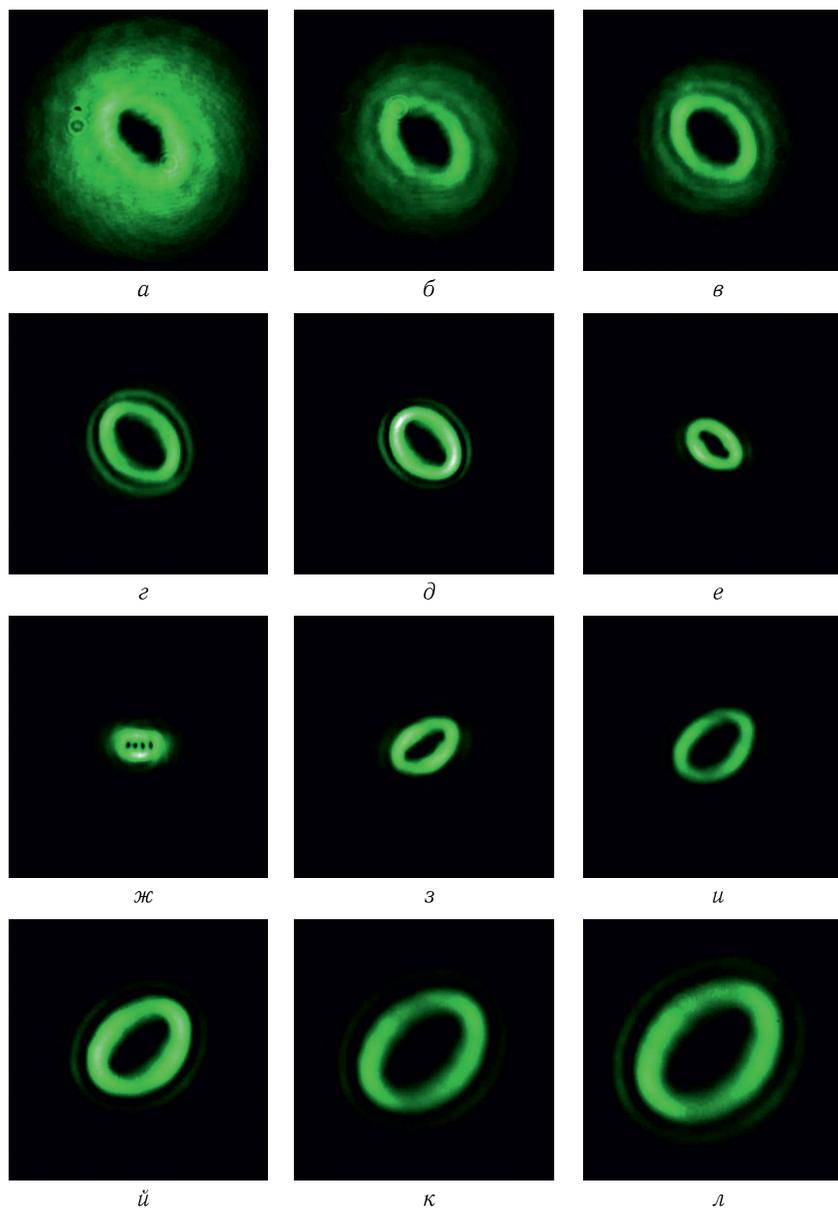


Рис. 5.6. Распределения интенсивности, полученные на различном расстоянии от плоскости линзы L_4 ($f_4 = 150$ мм) для случая эллиптической СФП с топологическим зарядом $n = 4$ и параметром $\beta = 0,6$: 100 мм (а), 125 мм (б), 150 мм (в), 175 мм (г), 200 мм (д), 225 мм (е), 250 мм (фокус) (ж), 275 мм (з), 300 мм (и), 325 мм (й), 350 мм (к), 375 мм (л). Размер картинок интенсивностей 1800 мкм на 1800 мкм

плоскости на рис. 5.6, ж. После фокуса расстояние между нулями опять уменьшается, и их трудно различить.

В этом разделе получены явные замкнутые выражения для комплексной амплитуды и нормированного орбитального углового момента (ОУМ) для обычного гауссова пучка, в который внедрен эллиптический оптический вихрь с n -кратно вырожденным нулем интенсивности в центре гауссова пучка. Показано, что эллиптический гауссов вихрь обладает дробным ОУМ, максимальное значение которого, равное топологическому заряду обычного вихря n , достигается при отсутствии эллиптичности у вихря. Большая ось эллипса интенсивности в сечении пучка вращается при распространении и поворачивается на 90 градусов от начальной плоскости до фокальной плоскости сферической линзы. На большой оси эллипса интенсивности находятся n нулей интенсивности, расстояние между которыми меняется как при распространении пучка, так и при изменении степени эллиптичности. Максимальное расстояние между нулями интенсивности будет в фокальной плоскости, при постоянной степени эллиптичности. При отсутствии эллиптичности все нули «собираются» в один осевой n -вырожденный ноль интенсивности. Такой пучок экспериментально сформирован с помощью освещения обычным гауссовым пучком эллиптической спиральной фазовой пластинки. Хотя формально пропускание такой фазовой пластинки (5.30) отличается от комплексной амплитуды эллиптического нуля (5.1), но, тем не менее, экспериментальные результаты качественно согласуются с теорией. Это объясняется тем, что распределения фазы у функций (5.1) и (5.30) одинаковые.

Заметим, что если, наоборот, рассмотреть эллиптический гауссов пучок с внедренным обычным радиально-симметричным вихрем с n -кратно вырожденным нулем в центре эллиптического гауссова пучка, то у такого пучка ОУМ будет целый и равен топологическому заряду вихря n при любой степени эллиптичности гауссова пучка.

5.2. Дифракция эллиптического гауссова пучка на эллиптической спиральной фазовой пластинке

В работе [47] наряду с плотностью орбитального углового момента (ОУМ) светового поля дается определение общего (интегрального) ОУМ, т.е. ОУМ, интегрированного по некоторому объему или по некоторой плоскости, поперечной направлению распространения. Известны работы о различных световых пучках, в которых изучается их интегральный ОУМ [160–167]. Для чего надо изучать интегральный ОУМ пучка? Во-первых, когда световой пучок используется для вращения несферической микрочастицы, желательно согласовать форму освещающего пучка и форму частицы. В этом случае общий ОУМ характеризует момент, действующий на частицу в целом. Кроме того,

большое значение ОУМ может быть получено с помощью спиральной фазовой пластинки с большим топологическим зарядом, которая не проста в изготовлении. Поэтому изучались безвихревые пучки с большим интегральным ОУМ [160, 161], формируемые цилиндрической линзой. Во-вторых, если размер вращаемых частиц много меньше размера пучка, то общий ОУМ влияет на ОУМ в области захвата и тем самым характеризует некоторую среднюю скорость неравномерного движения частиц вокруг оптической оси. В-третьих, когда такой пучок используется в качестве носителя информации в беспроводной оптической связи, он искажается средой, например, атмосферой или водой. Однако, некоторые интегральные характеристики пучка (например, полный ОУМ) остаются стабильными. Поэтому регистрирование этих интегральных характеристик может оказаться единственным способом декодирования искаженного сигнала.

Интегральный ОУМ был обобщен несколькими способами. Например, в работе [162] расширяется определение ОУМ для когерентных пучков на случай частично-когерентного света. В работе [163] изучается ОУМ затухающих полей. В [163] показано, что нормированный ОУМ (интегральный ОУМ на единицу мощности) затухающей бездифракционной моды Бесселя пропорционален не только топологическому заряду, но также и множителю, зависящему от волнового числа и быстроты спада амплитуды затухающего света. В работе [164] изучается поперечный линейный момент и интегральный ОУМ в случайной среде. В [164] приведены примеры, показывающие, что оптические вихри не являются необходимыми для наличия ОУМ, и наоборот, что наличие оптических вихрей не гарантирует ненулевой ОУМ. Показано, что если в среде имеются случайные неоднородности, то ОУМ сохраняется в среднем, но его флуктуации возрастают с пройденным расстоянием, хотя это возрастание и слабее для пучков с вращательной симметрией. В [165] представлена аналитическая процедура для конструирования оптического пучка с заданным значением интегрального ОУМ, сохраняя при этом возможность формировать поперечное распределение интенсивности без изменения ОУМ. В работах [166, 167] интегральный ОУМ раскладывается на две составляющие — вихревой ОУМ и асимметричный ОУМ. В [166] получена формула для эллиптической моды Лагерра–Гаусса, из которой видно, что он возрастает с увеличением эллиптичности. В некоторых наших работах также изучается интегральный ОУМ для некоторых лазерных пучков, включая пучки эллиптической формы [168, 169]. Обычно для формирования лазерных пучков используется пространственный модулятор света или дифракционный оптический элемент. Для нормального освещения модулятора в оптической схеме используются делители пучка (например, как в [170, 171]), что приводит к потерям части энергии, исходящей из лазера. Для разделения пучка, падающего на экран модулятора, и пучка, отраженного от него, можно использовать наклонное освеще-

нение (например, как в [172, 173]). В этом случае фазовая маска или фазовый оптический элемент действуют так, как если бы они были немного растянутыми, т. е. эллиптическими. Освещающий пучок также может иметь эллиптическую форму. Такой пучок может быть использован, например, для захвата микрочастиц и перемещения их по эллиптической траектории или для захвата и вращения единичного протяженного микрообъекта. Однако, скорость частиц зависит от ОУМ пучка, и потому возникает вопрос, влияет ли растяжение освещающего пучка или оптического элемента (или фазы на модуляторе) на ОУМ и если влияет, то каким образом.

В данном разделе исследуется ОУМ пучка с эллиптической симметрией (полученного, например, из круглого пучка с помощью цилиндрических линз), прошедшего через спиральную фазовую пластинку (СФП), которая также эллиптическая и повернута на некоторый угол вокруг оптической оси. Получено аналитическое выражение для полного ОУМ такого пучка. На основе этого выражения теоретически доказано, что ни прохождение круглого пучка через эллиптическую СФП, ни освещение круглой СФП эллиптическим пучком, не влияет на нормированный ОУМ, вносимый СФП, т. е. он остается равным топологическому заряду. Также показано, что экстремальные значения нормированного ОУМ получаются, когда СФП ориентирована параллельно или перпендикулярно эллипсу освещающего пучка. Получены также верхняя и нижняя граница ОУМ.

5.2.1. Орбитальный угловой момент эллиптического пучка после прохождения через эллиптическую спиральную фазовую пластинку. Традиционный вихревой лазерный пучок имеет комплексную амплитуду, состоящую из двух компонент: вихревой (угловой) фазовый множитель и некоторая радиальная функция с вращательной симметрией:

$$E(r, \varphi) = G(r) \exp(im\varphi), \quad (5.31)$$

где (r, φ) — полярные координаты в некоторой плоскости, перпендикулярной направлению распространения, $\exp(im\varphi)$ — вихревой множитель и $G(r)$ — радиальная функция, m — топологический заряд вихря. Хорошо известно, что нормированный ОУМ такого пучка (т. е. общий ОУМ, деленный на мощность пучка) равен его топологическому заряду m , независимо от формы пучка, определяемой функцией $G(r)$.

Теперь предположим, что пучок с эллиптически-симметричным распределением интенсивности (но с произвольной фазой) проходит через СФП, которая также эллиптическая и повернута на некоторый угол. Комплексная амплитуда выходного пучка имеет вид

$$E(x, y) = A(r') \exp(i\Psi), \quad (5.32)$$

где (x, y) — декартовы координаты в поперечной плоскости, $A(r')$ — радиальное распределение амплитуды пучка, а $\Psi(x, y)$ — его фаза

после прохождения эллиптической СФП:

$$\Psi(x, y) = \Psi_0(x, y) + m\varphi'', \quad (5.33)$$

где $\Psi_0(x, y)$ — некоторая произвольная фаза освещающего излучения, и

$$r' = \sqrt{\frac{x^2}{a_x^2} + \frac{y^2}{a_y^2}}, \quad (5.34)$$

$$\varphi'' = \arg\left(\frac{x \cos \alpha + y \sin \alpha}{b_x} + i \frac{y \cos \alpha - x \sin \alpha}{b_y}\right), \quad (5.35)$$

где a_x и a_y — положительные числа, определяющие эллиптичность освещающего излучения, b_x и b_y — также положительные числа, определяющие эллиптичность СФП, а α — ее угол поворота (рис. 5.7).

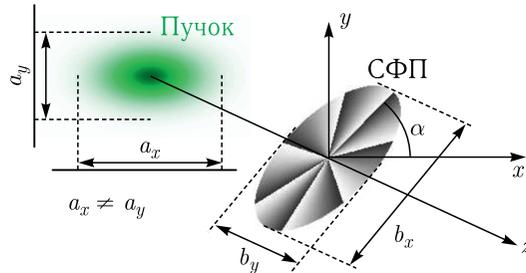


Рис. 5.7. Прохождение эллиптического пучка через эллиптическую повернутую СФП

Перейдем к полярным координатам (r, φ) ($x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$), в которых плотность продольной составляющей ОУМ пучка равна

$$j_z(r, \varphi) = \text{Im} \left\{ E^* \frac{\partial E}{\partial \varphi} \right\}, \quad (5.36)$$

где $\text{Im}\{\dots\}$ — мнимая часть комплексного числа.

Тогда плотность ОУМ пучка (5.32) имеет вид:

$$j_z(r, \varphi) = A^2(r') \left[\frac{\partial \Psi_0}{\partial \varphi} + m \frac{\partial \varphi''}{\partial \varphi} \right]. \quad (5.37)$$

Согласно (5.37), общий ОУМ пучка (т.е. интеграл от плотности ОУМ (5.37) по всей поперечной плоскости) равен сумме ОУМ J_{z0} освещающего пучка и ОУМ ΔJ_z , добавленного эллиптической СФП (далее будем называть его СФП-индуцированный ОУМ):

$$J_z = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} j_z(r, \varphi) r dr d\varphi = J_{z0} + \Delta J_z =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} A^2 \frac{\partial \Psi_0}{\partial \varphi} r dr d\varphi + m \int_0^\infty \int_0^{2\pi} A^2 \frac{\partial \varphi''}{\partial \varphi} r dr d\varphi. \quad (5.38)$$

Вывод формулы для нормированного СФП-индуцированного ОУМ приведен в конце раздела. Здесь запишем только окончательное выражение:

$$\frac{\Delta J_z}{W} = \frac{m}{\gamma \cos^2 \alpha + \gamma^{-1} \sin^2 \alpha}, \quad (5.39)$$

где W — мощность пучка,

$$\gamma = \frac{a_x b_y + a_y b_x}{a_x b_x + a_y b_y}.$$

Формула (5.39) — основной результат данного раздела. Легко видеть, что для круглого вихря, когда $a_x = a_y$ и $b_x = b_y$, получается известное тождество: $\Delta J_z/W = m$.

Производная знаменателя в (5.39) по углу поворота СФП α равна нулю при $\alpha = p\pi/2$, где p — произвольное целое число. Поэтому экстремальные значения нормированного ОУМ достигаются, когда СФП параллельна или ортогональна эллиптическому поперечному сечению интенсивности падающего пучка. Если $(a_y - a_x)(b_y - b_x) > 0$, то нормированный ОУМ максимален при $\alpha = 0$ или $\alpha = \pi$ и минимален при $\alpha = \pi/2$ или $\alpha = 3\pi/2$. И наоборот, если $(a_y - a_x)(b_y - b_x) < 0$, то нормированный ОУМ максимален при $\alpha = \pi/2$ или $\alpha = 3\pi/2$ и минимален при $\alpha = 0$ или $\alpha = \pi$. Таким образом, ОУМ максимален, когда и освещающий пучок и СФП «вытянуты» в одном направлении, и минимален, когда эти направления ортогональны.

Возрастание и убывание нормированного СФП-индуцированного ОУМ, когда СФП направлена параллельно или ортогонально пучку, объяснимо. В первом случае наибольший градиент фазы СФП (а потому и наибольшая азимутальная составляющая вектора Пойнтинга пучка на выходе СФП) находится в области, наиболее удаленной от оптической оси (точка A на рис. 5.8, a). Прибегая к аналогии с механикой, в точках с большим плечом прикладывается большая азимутальная сила. Напротив, во втором случае наибольший градиент фазы находится в области, ближайшей к оптической оси (точка D на рис. 5.8, b), в то время как в самой дальней области градиент фазы слабый (точка C на рис. 5.8, b). По аналогии с механикой, максимальная азимутальная сила прикладывается в точках с малым плечом, в то время как в точках с большим плечом прикладываемая сила минимальна.

Пусть и СФП, и пучок вытянуты в одном направлении, для определенности вдоль оси x , т.е. $a_x > a_y$, $b_x > b_y$ и $\alpha = 0$. Тогда в (5.39) $\gamma < 1$ и нормированный СФП-индуцированный ОУМ увеличивается:

$$\frac{\Delta J_z}{W} = m/\gamma = m \frac{a_x b_x + a_y b_y}{a_x b_y + a_y b_x}. \quad (5.40)$$

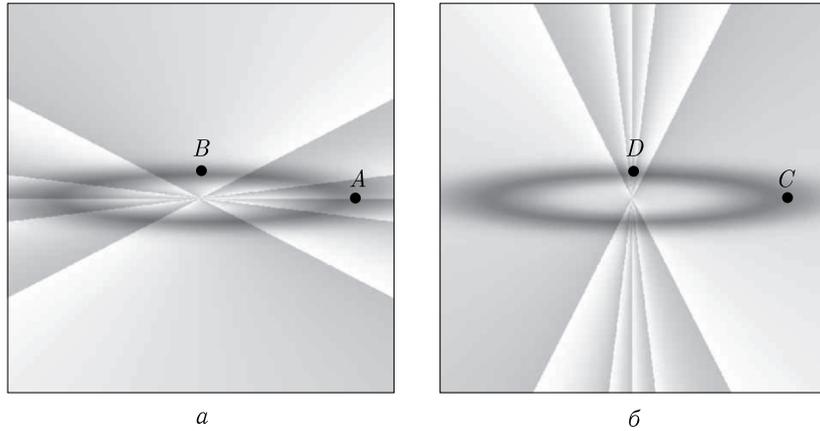


Рис. 5.8. Эллиптическая интенсивность, наложенная на фазу эллиптической СФП, ориентированной параллельно (а) и перпендикулярно (б) интенсивности. В точке А сильный градиент фазы сочетается со большим плечом, а в точке В слабый градиент фазы сочетается с малым плечом. В точке С слабый градиент фазы сочетается с большим плечом, в то время как в точке D большой градиент фазы сочетается с малым плечом

При повороте СФП на угол $\alpha = \pi/2$ нормированный ОУМ уменьшается:

$$\frac{\Delta J_z}{W} = m\gamma = m \frac{a_x b_y + a_y b_x}{a_x b_x + a_y b_y}. \quad (5.41)$$

Для углов α между 0 и $\pi/2$ нормированный СФП-индуцированный ОУМ ΔJ_z принимает значения в интервале, верхняя и нижняя границы которого определяются уравнениями (5.40) и (5.41). В частности, если СФП повернута на угол $\alpha_{\text{circ}} = \arccos[(a_y - a_x)(b_y - b_x)/(a_y + a_x)/(b_y + b_x)]/2$, то нормированный СФП-индуцированный ОУМ ΔJ_z равен топологическому заряду m , т.е. эллиптическая СФП действует как круглая.

На рис. 5.9 показана зависимость ОУМ эллиптического пучка ($a_x = 2, a_y = 1$) после прохождения через эллиптическую СФП ($b_x = 3, b_y = 1$) с топологическим зарядом $m = 5$ от угла поворота СФП α .

При параллельном расположении освещающего пучка и СФП, ОУМ (5.40) возрастает с эллиптичностью СФП (b_x/b_y), так как $\Delta J_z/W = m[a_x(b_x/b_y) + a_y]/[a_y(b_x/b_y) + a_x]$, а это отношение растет, поскольку $a_x > a_y$. В пределе, когда $b_x/b_y \rightarrow \infty$, нормированный ОУМ стремится к $\Delta J_z/W = ma_x/a_y$, т.е. эллиптичность освещающего пучка определяет максимальный ОУМ, который можно добавить пучку эллиптической СФП. Точно так же можно показать, что минимальный ОУМ равен $\Delta J_z/W = ma_y/a_x$ и достигается при условии $b_x/b_y \rightarrow \infty$, но когда СФП перпендикулярна пучку.

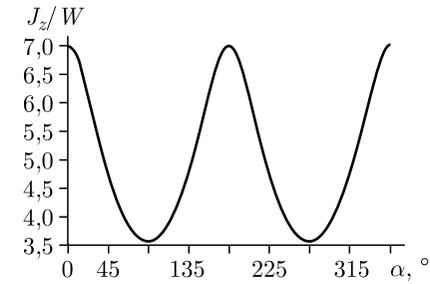


Рис. 5.9. Зависимость нормированного ОУМ эллиптического пучка ($a_x = 2, a_y = 1$) после прохождения через эллиптическую СФП ($b_x = 3, b_y = 1$) с топологическим зарядом $m = 5$ от угла поворота СФП α

Далее рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Эллиптичность интенсивности пучка и эллиптичность СФП совпадают (т.е. $b_x = a_x, b_y = a_y, \alpha = 0$). Этот случай возникает при поперечном сужении/растяжении круглого оптического вихря. Согласно (5.39), нормированный ОУМ такого эллиптического вихря равен

$$\frac{J_z}{W} = \frac{m}{2} \left(\frac{a_x}{a_y} + \frac{a_y}{a_x} \right). \quad (5.42)$$

Эта формула была получена в [166] для эллиптической моды Лагерра-Гаусса порядка (0,1), а в [174] — для эллиптического гауссова пучка.

Если СФП повернуть на угол $\alpha = \pi/2$, то нормированный ОУМ уменьшится и станет равен

$$\frac{\Delta J_z}{W} = 2m \left(\frac{a_y}{a_x} + \frac{a_x}{a_y} \right)^{-1}. \quad (5.43)$$

2. Радиально-симметричный вихревой пучок с топологическим зарядом n (т.е. $J_{z0}/W = n$) проходит через эллиптическую СФП ($a_x = a_y, b_x \neq b_y$) с топологическим зарядом m . Согласно (5.39), ОУМ, индуцированный СФП, не зависит от ее эллиптичности ($\Delta J_z/W = m$), и нормированный ОУМ прошедшего пучка равен

$$\frac{J_z}{W} = m + n. \quad (5.44)$$

3. Эллиптический пучок проходит через круглую СФП ($a_x \neq a_y, b_x = b_y$). Из (5.39) следует, что нормированный ОУМ ΔJ_z , индуцированный СФП, не зависит от эллиптичности пучка и равен топологическому заряду СФП m .

5.2.2. Численное моделирование. Из (5.42) следует, что для изменения ОУМ круглого оптического вихря вовсе не требуется СФП. Это может быть сделано путем поперечного сужения/растяжения

пучка, комплексная амплитуда которого приобретает вид $E(x, y) = A[(x/a_x)^2 + (y/a_y)^2]^{1/2} \exp\{im \arg[(x/a_x) + i(y/a_y)]\}$. Однако, таким способом нормированный ОУМ может быть только увеличен. Для увеличения ОУМ в β раз требуется пучку придать следующую эллиптичность:

$$\frac{a_y}{a_x} = \frac{b_y}{b_x} = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - 1}. \quad (5.45)$$

В данном разделе численно исследуется ОУМ эллиптических пучков Лагерра–Гаусса (ЛГ) [175] с радиусами перетяжки a_x и a_y . В плоскости перетяжки такие пучки имеют следующие комплексные амплитуды (в декартовых координатах):

$$E_{LG}(x, y, 0) = (r'^m) L_p^m(2r'^2) \exp(-r'^2 + im\varphi'), \quad (5.46)$$

где $r' = [(x/a_x)^2 + (y/a_y)^2]^{1/2}$, $\varphi' = \arg[(x/a_x) + i(y/a_y)]$, m — топологический заряд пучка, p — радиальный индекс ЛГ-пучка.

На рис. 5.10 показаны распределения интенсивности и фазы пучка ЛГ (5.46) с радиусами перетяжки $a_x = 1$ мм и $a_y = a_x[\beta - (\beta^2 - 1)^{1/2}]$, где $\beta = 2$ (т.е. ОУМ должен удвоиться) при следующих параметрах: длина волны $\lambda = 532$ нм, топологический заряд $m = 10$, нижний индекс пучка ЛГ $p = 1$, расчетная область $-R \leq x, y \leq R$, где $R = 8$ мм.

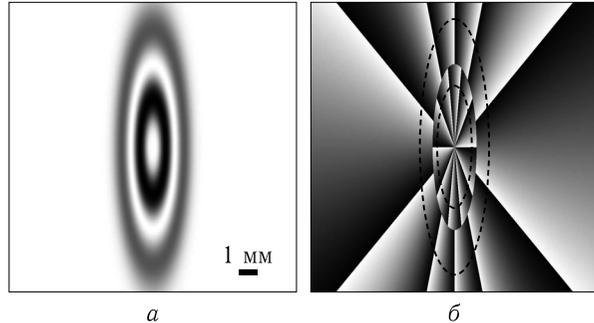


Рис. 5.10. Распределения интенсивности (негатив) (а) и фазы (б) эллиптического пучка ЛГ (5.46): длина волны $\lambda = 532$ нм, топологический заряд оптического вихря $m = 10$, радиусы перетяжки $a_x = 1$ мм и $a_y = a_x[\beta - (\beta^2 - 1)^{1/2}]$, где $\beta = 2$, нижний индекс пучка $p = 1$, расчетная область $-R \leq x, y \leq R$, где $R = 8$ мм. Пунктирные эллипсы на распределении фазы соответствуют световым эллипсам на распределении интенсивности

Согласно (5.42), нормированный ОУМ пучка на рис. 5.10 должен быть равен $m\beta = 20$. Численный расчет дал значения 19.655679. Микрочастица, захваченная в световом эллипсе на рис. 5.10, должна двигаться вдоль него неравномерно: быстрее на дальней стороне от оси и медленнее на ближней стороне.

Далее численно изучается СФП-индуцированный ОУМ радиально-симметричного пучка ЛГ после прохождения через эллиптическую СФП. Такой пучок в полярных координатах имеет следующую комплексную амплитуду:

$$E_{LG}(r, \varphi, 0) = \left(\frac{r}{w}\right)^n L_p^n\left(\frac{2r^2}{w^2}\right) \exp\left(-\frac{r^2}{w^2} + in\varphi + im\varphi'\right), \quad (5.47)$$

где w — радиус перетяжки гауссова пучка, $\varphi' = \arg[(\cos \varphi/b_x) + i(\sin \varphi/b_y)]$ (это следует из (4.35) при $\alpha = 0$), m — топологический заряд эллиптической СФП, p и n — радиальный и азимутальный индексы освещающего пучка ЛГ.

На рис. 5.11 показаны распределения интенсивности и фазы пучка ЛГ после прохождения через эллиптическую СФП. Для расчетов использовались следующие параметры: длина волны $\lambda = 532$ нм, топологический заряд СФП $m = 7$, масштабные коэффициенты СФП $b_x = 4$ мм, $b_y = 1$ мм, радиус перетяжки гауссова пучка $w = 2$ мм, нижний и верхний индексы пучка ЛГ $p = 3$ и $n = 3$, расчетная область $-R \leq x, y \leq R$, где $R = 10$ мм.

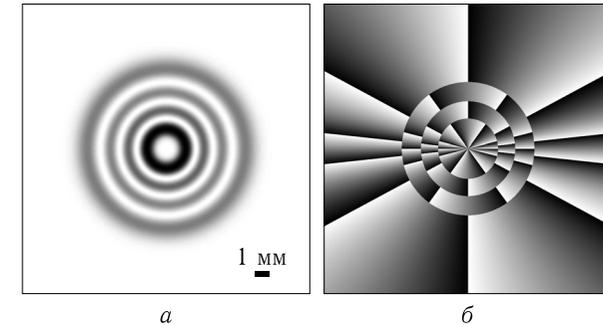


Рис. 5.11. Распределения интенсивности (негатив) (а) и фазы (б) круглого пучка ЛГ после прохождения через эллиптическую СФП. Параметры расчета: длина волны $\lambda = 532$ нм, топологический заряд СФП $m = 7$, масштабные коэффициенты СФП $b_x = 4$ мм, $b_y = 1$ мм, радиус перетяжки гауссова пучка $w = 2$ мм, нижний и верхний индексы пучка ЛГ $p = 3$ и $n = 3$, расчетная область $-R \leq x, y \leq R$, где $R = 10$ мм

Из рис. 5.11 видно, что распределение интенсивности остается радиально-симметричным, но фаза вдоль световых колец меняется неравномерно из-за эллиптичности СФП. Такие пучки могут использоваться для неравномерного перемещения частиц по круговой траектории. Согласно теоретическим выводам (уравнение (5.44)), нормированный ОУМ должен быть равен суммарному топологическому заряду $m + n = 10$. Численно рассчитанный нормированный ОУМ оказался равен 9,9892248.

Ниже численно изучается ОУМ эллиптического пучка ЛГ, прошедшего через круглую СФП. Такой пучок имеет следующую комплексную амплитуду (в декартовых координатах):

$$E_{LG}(x, y, 0) = (r^m) L_p^n(2r'^2) \exp(-r'^2 + in\varphi' + im\varphi''), \quad (5.48)$$

где $r' = [(x/a_x)^2 + (y/a_y)^2]^{1/2}$, $\varphi' = \arg[(x/a_x) + i(y/a_y)]$, $\varphi'' = \arg(x + iy)$, a_x и a_y — радиусы перетяжки гауссова пучка, m — топологический заряд СФП, n — топологический заряд освещающего пучка, p — радиальный индекс пучка ЛГ.

На рис. 5.12 показаны распределения интенсивности и фазы пучка ЛГ, прошедшего через круглую СФП. Для расчета использовались следующие значения параметров: длина волны $\lambda = 532$ нм, топологический заряд СФП $m = 7$, радиусы перетяжки гауссова пучка $a_x = 1$ мм и $a_y = 4$ мм, нижний и верхний индексы пучка ЛГ $p = 3$ и $n = 3$, расчетная область $-R \leq x, y \leq R$, где $R = 10$ мм.

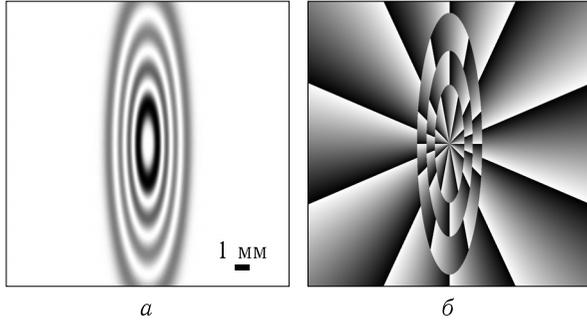


Рис. 5.12. Распределения интенсивности (негатив) (а) и фазы (б) эллиптического пучка ЛГ после прохождения через круглую СФП. Параметры расчета: длина волны $\lambda = 532$ нм, топологический заряд СФП $m = 7$, радиусы перетяжки гауссова пучка $a_x = 1$ мм и $a_y = 4$ мм, нижний и верхний индекс пучка ЛГ $p = 3$ и $n = 3$, расчетная область $-R \leq x, y \leq R$, где $R = 10$ мм

Фаза на рис. 5.12, б складывается из фазы эллиптического пучка ЛГ и фазы круглой СФП. Согласно теории, нормированный ОУМ должен быть равен $J_z/W = 13,375$ (так как ОУМ освещающего пучка равен $J_{z0}/W = (3/2) \times (4 + 1/4) = 6,375$, а ОУМ, вносимый СФП, равен $\Delta J_z/W = 7$). Численно полученный нормированный ОУМ составил 13,38804 (значение получено для большей области, чем на рис. 5.12: $R = 15$ мм).

На рис. 5.13 показаны распределения интенсивности и фазы эллиптического пучка ЛГ при следующих параметрах: длина волны $\lambda = 532$ нм, топологический заряд эллиптической СФП $m = 10$, радиусы перетяжки гауссова пучка $a_x = 4$ мм и $a_y = 1$ мм, порядок ЛГ-пучка $(p, n) = (3, 0)$, угол поворота СФП $\alpha = 0$ (рис. 5.13, б), $\alpha = \pi/2$

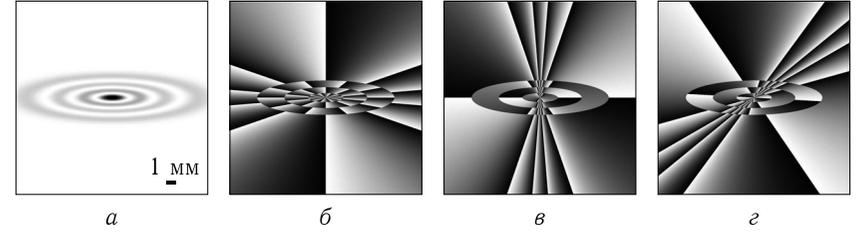


Рис. 5.13. Распределения интенсивности (негатив) (а) и фазы (б-г) эллиптического ЛГ после прохождения через эллиптическую СФП: длина волны $\lambda = 532$ нм, топологический заряд эллиптической СФП $m = 10$, радиусы перетяжки гауссова пучка $a_x = 4$ мм и $a_y = 1$ мм, порядок ЛГ-пучка $(p, n) = (3, 0)$, угол поворота СФП $\alpha = 0$ (б), $\alpha = \pi/2$ (в), $\alpha = \alpha_{\text{circ}} \approx 34^\circ$ (г), расчетная область $-R \leq x, y \leq R$, где $R = 10$ мм

(рис. 5.13, в), $\alpha = \alpha_{\text{circ}} \approx 34^\circ$ (рис. 5.13, г), расчетная область $-R \leq x, y \leq R$, где $R = 10$ мм.

Как видно из (5.42), теоретическое значение нормированного ОУМ падающего пучка равно нулю: $J_{z0} = (0/2)(4 + 1/4) = 0$. Согласно (5.42), (5.43) и (5.39), эллиптическая СФП формирует ОУМ, равный $21,25(\Delta J_z/W = (10/2)(4 + 1/4))$, $4,7058824$ ($\Delta J_z/W = 2 \times 10/(4 + 1/4)$) и 10 для углов поворота $\alpha = 0, \pi/2$, и α_{circ} соответственно. Численный расчет дал значения 20,673934, 4,5958497 и 9,8848944.

5.2.3. Вывод формулы для нормированного ОУМ. Так как в полярных координатах $\varphi'' = a \tan[(b_x/b_y) \tan(\varphi - \alpha)]$ (с точностью до константы), то, согласно (5.38), СФП-индуцированный ОУМ равен

$$\Delta J_z = mb_x b_y \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{A^2(r') r dr d\varphi}{b_y^2 \cos^2(\varphi - \alpha) + b_x^2 \sin^2(\varphi - \alpha)}. \quad (5.49)$$

Переходя к декартовым координатам ($x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$), масштабируя их ($x = a_x u$, $y = a_y v$), и снова переходя к полярным координатам ($u = r \cos \alpha$, $v = r \sin \alpha$), получим:

$$\Delta J_z = ma_x a_y b_x b_y \times \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{A^2(r) (a_x^2 \cos^2 \varphi + a_y^2 \sin^2 \varphi) r dr d\varphi}{b_y^2 (a_x \cos \varphi \cos \alpha + a_y \sin \varphi \sin \alpha)^2 + b_x^2 (a_y \sin \varphi \cos \alpha - a_x \cos \varphi \sin \alpha)^2}. \quad (5.50)$$

Разделив СФП-индуцированный ОУМ (5.50) пучка на его мощность

$$W = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty |E(x, y)|^2 dx dy = 2\pi a_x a_y \int_0^\infty A^2(r) r dr, \quad (5.51)$$

получим нормированный ОУМ:

$$\frac{\Delta J_z}{W} = \frac{mb_x b_y}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(a_x^2 + a_y^2) + (a_x^2 - a_y^2) \cos 2\varphi}{s + p \cos 2\varphi + q \sin 2\varphi} d\varphi. \quad (5.52)$$

где

$$\begin{aligned} s &= a_x^2 (b_x^2 \sin^2 \alpha + b_y^2 \cos^2 \alpha) + a_y^2 (b_x^2 \cos^2 \alpha + b_y^2 \sin^2 \alpha), \\ p &= a_x^2 (b_x^2 \sin^2 \alpha + b_y^2 \cos^2 \alpha) - a_y^2 (b_x^2 \cos^2 \alpha + b_y^2 \sin^2 \alpha), \\ q &= a_x a_y (b_y^2 - b_x^2) \sin 2\alpha. \end{aligned} \quad (5.53)$$

Интеграл (5.52) может быть преобразован в интеграл по единичной окружности в комплексной плоскости и вычислен с помощью теоремы о вычетах:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta J_z}{W} &= \frac{mb_x b_y}{2\pi} \left\{ \oint_{|z|=1} \frac{(a_x^2 + a_y^2) + (a_x^2 - a_y^2) \frac{z + z^{-1}}{2}}{s + p \frac{z + z^{-1}}{2} + q \frac{z - z^{-1}}{2i}} \frac{dz}{iz} \right\} = \\ &= -i \frac{mb_x b_y}{2\pi} \left\{ \oint_{|z|=1} \frac{(a_x^2 - a_y^2) z^2 + 2(a_x^2 + a_y^2) z + (a_x^2 - a_y^2)}{(p - iq) z (z - z_1) (z - z_2)} dz \right\}. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Имеется три полюса: $z_0 = 0$, $z_1 = (-s + D^{1/2})/(p - iq)$, $z_2 = (-s - D^{1/2})/(p - iq)$, где $D = s^2 - p^2 - q^2$. Можно показать, что для значений s , p , q в (5.52) дискриминант равен $D = (2a_x a_y b_x b_y)^2$. Из (5.54) видно, что по теореме Виета $z_1 z_2 = (p + iq)/(p - iq)$. Так как в нашем случае p и q вещественны, то $|z_1 z_2| = 1$. Так как все коэффициенты растяжения a_x , a_y , b_x , b_y положительны, то $D > 0$, т. е. $z_1 \neq z_2$. То есть это означает, что из полюсов z_1 и z_2 только один находится внутри окружности единичного радиуса. Очевидно, это z_1 (так как $s > 0$). Поэтому интеграл (5.54) равен

$$\begin{aligned} \frac{\Delta J_z}{W} &= -i \frac{mb_x b_y}{2\pi} 2\pi i \times \\ &\times \left[\frac{a_x^2 - a_y^2}{(p - iq) z_1 z_2} + \frac{(a_x^2 - a_y^2) z_1^2 + 2(a_x^2 + a_y^2) z_1 + (a_x^2 - a_y^2)}{(p - iq) z_1 (z_1 - z_2)} \right] = \\ &= mb_x b_y \left[\frac{a_x^2 - a_y^2}{p + iq} + \frac{(a_x^2 - a_y^2) z_1^2 + 2(a_x^2 + a_y^2) z_1 + (a_x^2 - a_y^2)}{2z_1 \sqrt{D}} \right]. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Преобразование этого выражения приводит к формуле для ОУМ:

$$\frac{\Delta J_z}{W} = m \frac{(a_x b_x + a_y b_y)(a_x b_y + a_y b_x)}{(a_x b_x + a_y b_y)^2 \sin^2 \alpha + (a_x b_y + a_y b_x)^2 \cos^2 \alpha}. \quad (5.56)$$

Основным результатом данного раздела является замкнутое выражение для нормированного ОУМ (ОУМ на единицу мощности) лазерного пучка эллиптической формы, прошедшего через СФП, которая также эллиптическая и повернута на произвольный угол вокруг оптической оси (уравнение (5.39)). Это уравнение обобщает хорошо известную формулу для традиционных круглых оптических вихрей (мод Бесселя, пучков Бесселя–Гаусса и Лагерра–Гаусса), согласно которой нормированный ОУМ равен топологическому заряду. Полученное выражение доказывает, что эллиптичность пучка, падающего на круглую СФП, не влияет на нормированный ОУМ пучка, вносимый этой СФП, который равен ее топологическому заряду. Аналогично, если радиально симметричный пучок освещает эллиптическую СФП, то вызванный ею нормированный ОУМ пучка также равен топологическому заряду СФП и не зависит от ее эллиптичности. Также показано, что при прочих равных условиях нормированный ОУМ эллиптического оптического вихря больше ОУМ круглого вихря (уравнение (5.42)). Показано, что при освещении эллиптическим пучком эллиптической СФП нормированный ОУМ выходного пучка максимален (минимален), когда и пучок, и СФП, ориентированы в одинаковых (перпендикулярных) направлениях. Получены теоретические пределы максимального и минимального ОУМ, индуцированного СФП с бесконечной эллиптичностью. Результаты могут найти применение в оптическом манипулировании, например, для непрерывного изменения ОУМ, передаваемого частице, путем поворота СФП.

Глава 6

**ВРАЩАЮЩИЕСЯ АСТИГМАТИЧЕСКИЕ
ЛАЗЕРНЫЕ ПУЧКИ****6.1. Безвихревой астигматический пучок**

Лазерные пучки с орбитальным угловым моментом (ОУМ) активно исследуются в настоящее время из-за широкого применения таких пучков для оптического захвата и вращения микрочастиц [176] и холодных атомов [177], в фазово-контрастной микроскопии [178], в микроскопии со стимулированным истощением излучения [179], в оптической классической [180] и квантовой информатике [144].

Интересный лазерный пучок, который обладает ОУМ, но не имеет изолированных нулей интенсивности с фазовой дислокацией, рассмотрен в [160]. В [160] вычислили ОУМ для эллиптического гауссова пучка, сфокусированного цилиндрической линзой. Идея использования цилиндрической линзы для придания пучку ОУМ была впервые высказана в [181]. В [181] было экспериментально показано, что пучок Эрмита–Гаусса, не обладающий ОУМ, после цилиндрической линзы на определенном расстоянии и при определенных условиях преобразуется в пучок Лагерра–Гаусса с ОУМ.

В работах [182–193] пытались получить как можно большее значение ОУМ. В [182] предложено увеличивать ОУМ с помощью набора гауссовых вихревых пучков, центры которых расположены на окружности, а оптические оси отдельных пучков и общая оптическая ось являются скрещенными прямыми. В [182] показано, что ОУМ такого составного пучка может быть равен 204 на фотон. В [183] вместо гауссовых пучков предлагается использовать небольшие отверстия в непрозрачном экране, как точечные источники. Если их расположить в виде спирали, то в совокупности они сформируют вихревой пучок с ОУМ. В [183] практически реализован пучок с ОУМ, равным 3. В [184] показано, что при острой фокусировке оптического вихря с большим топологическим зарядом уменьшается контраст или видность боковых лепестков. В [184] практически фокусировался пучок с ОУМ, равным 15 на фотон. В [185] предложен интересный способ определения топологического заряда оптического вихря с помощью

кольцевой дифракционной решетки. Экспериментально показано, что таким способом можно определить топологический заряд ± 25 . В [186] экспериментально с помощью трехволнового смещения в нелинейной среде Керра сформированы вихревые гармоники с ОУМ до 30 на фотон. В [187] практически осуществили с помощью цифрового многоэлементного зеркала (с числом микрзеркал 1024×768) генерацию идеального оптического вихря с топологическим зарядом 90. В [188] с помощью жидкокристаллического модулятора света (число элементов 1900×1200) сформировали оптический вихрь с топологическим зарядом 200, что позволило вращать микрочастицы диаметром 1,4 мкм со скоростью 500 мкм/с. В [189] также с помощью модулятора света (число отсчетов 1920×1080) сформированы перепутанные пары фотонов с ОУМ ± 300 на фотон. В [190] с помощью спирального фазового зеркала, полученного в пластинке алюминия алмазным резцом, экспериментально сформирован оптический вихрь с топологическим зарядом 100. Эти же авторы [191] с помощью усовершенствованной технологии на подложке из алюминия диаметром 75 мм и шероховатостью 3 нм создали спиральное зеркало, способное формировать оптические вихри с топологическим зарядом 1020. В [191] также интерферометрически доказали, что сформированный зеркалом оптический вихрь имеет топологический заряд 5050, но форма вихря при этом существенно искажилась. В [192] с помощью электронной литографии в резисте создали голограмму диаметром 80 мкм с разрешением 35 нм и высотой рельефа 25 нм, которая позволила сформировать вихревой пучок электронов с энергией 0,5–1 эВ с топологическим зарядом 1000. И, наконец, в [193] с помощью спирального алюминиевого зеркала диаметром около 50 мм для длины волны 810 нм сформированы фотоны, перепутанные по ОУМ и поляризации. Причем квантовый ОУМ фотонов был равен ± 10010 . Это максимальное значение ОУМ, полученное на сегодняшний день.

В данном разделе, следуя работе [160], мы покажем, что эллиптический гауссов пучок после цилиндрической линзы, ось которой не совпадает с осями эллипса гауссова профиля, при распространении вращается и не является вихревым лазерным пучком. Хотя его полный ОУМ может достигать больших значений путем изменения радиусов перетяжки эллиптического гауссова пучка и фокусного расстояния цилиндрической линзы. Рассчитаны коэффициенты разложения комплексной амплитуды такого астигматического гауссова пучка в ряд по угловым гармоникам. Также получена точная формула для ОУМ в виде ряда по функциям Лежандра второго рода.

6.1.1. Безвихревой пучок с орбитальный угловым моментом.

Обычно рассматриваются параксиальные вихревые лазерные пучки, обладающие орбитальным угловым моментом (ОУМ). У таких пучков есть точки сингулярности — это изолированные нули интенсивности,

в которых фаза не определена, и вокруг которых изофазная поверхность волнового фронта имеет спиральную форму. Но, оказывается, есть простые световые поля, которые обладают ОУМ и не имеют изолированных нулей интенсивности с вихревой фазой. Рассмотрим гауссов эллиптический пучок, в перетяжке которого расположена цилиндрическая линза [160], образующая которой повернута в плоскости перетяжки на угол α . Комплексная амплитуда света сразу за цилиндрической линзой имеет вид

$$E(x, y) = \exp\left(-\frac{x^2}{w_x^2} - \frac{y^2}{w_y^2}\right) \times \exp\left(-\frac{ikx^2 \cos^2 \alpha}{2f} - \frac{iky^2 \sin^2 \alpha}{2f} - \frac{ikxy \sin 2\alpha}{2f}\right), \quad (6.1)$$

где w_x и w_y — радиусы перетяжки гауссова пучка по декартовым осям, f — фокусное расстояние тонкой цилиндрической линзы, образующая которой имеет угол с вертикальной осью y , равный α (линза повернута против часовой стрелки), k — волновое число света. Нормированный ОУМ в паракиральном случае вычисляется по формулам [160] (с точностью до постоянных):

$$J_z = \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{E}(x, y) \left(x \frac{\partial E(x, y)}{\partial y} - y \frac{\partial E(x, y)}{\partial x} \right) dx dy, \quad (6.2)$$

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{E}(x, y) E(x, y) dx dy, \quad (6.3)$$

где J_z — проекция ОУМ на оптическую ось, W — плотность энергии (мощности) света, Im — мнимая часть числа, \bar{E} — комплексно сопряженная амплитуда к амплитуде (6.1). Подставляя (6.1) в (6.2) и (6.3), получим простое выражение для нормированного ОУМ светового поля (6.1):

$$\frac{J_z}{W} = \left(\frac{k \sin 2\alpha}{8f} \right) (w_y^2 - w_x^2). \quad (6.4)$$

Из (6.4) видно, что ОУМ равен нулю, если гауссов пучок имеет круглое сечение ($w_x = w_y$) или линза не имеет наклона к вертикальной оси ($\alpha = 0$). При наклоне в 45 градусов ОУМ (6.4) максимальный, при прочих равных условиях. Из (6.4) также видно, что ОУМ пучка (6.1) в общем случае дробный, хотя может быть и целым. Чем меньше фокусное расстояние цилиндрической линзы, тем больше ОУМ пучка, и чем больше степень эллиптичности пучка (6.1), тем больше его ОУМ. Знак ОУМ определяется тем, по какой оси, y или x , больше вытянут гауссов пучок в перетяжке. Преимущество пучка (6.1) в том,

что он может быть реализован без дополнительных элементов, без модулятора света, спиральной фазовой пластинки или голограммы с «вилочкой». Для его формирования надо всего две цилиндрические линзы, одна из которых формирует эллиптический гауссов пучок, а вторая — создает ОУМ.

Оценим величину ОУМ для конкретных значений величин, входящих в (6.4). Гауссов пучок считается паракиральным, если радиусы его перетяжки больше длины волны, пусть они будут равны $w_x = 2$ мм и $w_y = 1$ мм, фокусное расстояние пусть будет равно $f = 10$ мм, а длина волны $\lambda = 0,5$ мкм, наклон линзы равен 45 градусов ($\alpha = \pi/4$). Тогда ОУМ в (6.4) будет равен 471,24.

6.1.2. Орбитальный угловой момент астигматического пучка.

Чтобы наглядно показать формирование ОУМ, ОУМ пучка (6.1) ниже будет рассчитан другим способом, основанном на разложении амплитуды поля (6.1) в ряд по угловым гармоникам. Разложим амплитуду (6.1) в полярных координатах (r, φ) :

$$E(r, \varphi) = \exp(-ar^2 \cos^2 \varphi - br^2 \sin^2 \varphi - icr^2 \sin 2\varphi) \quad (6.5)$$

в ряд по угловым гармоникам:

$$E(r, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(r) \exp(in\varphi), \quad (6.6)$$

где

$$C_n(r) = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} E(r, \varphi) \exp(-in\varphi) d\varphi, \quad (6.7)$$

а также

$$\begin{aligned} a &= w_x^{-2} + ik(2f)^{-1} \cos^2 \alpha, \\ b &= w_y^{-2} + ik(2f)^{-1} \sin^2 \alpha, \\ c &= k(4f)^{-1} \sin 2\alpha. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Интеграл (6.7) можно переписать в виде:

$$C_n(r) = (2\pi)^{-1} e^{-D} \int_0^{2\pi} \exp(-in\varphi - A \cos 2\varphi - iB \sin 2\varphi) d\varphi, \quad (6.9)$$

где $A = [(a - b)/2]r^2$, $B = cr^2$, $D = [(a + b)/2]r^2$. После замены $t = 2\varphi$, и с учетом четности номера $n = 2m$, вместо (6.9) получим:

$$C_n(r) = (2\pi)^{-1} e^{-D} \int_0^{2\pi} \exp(-imt - A \cos t - iB \sin t) dt =$$

$$= (-i)^m e^{-D+im\theta} J_m(F) = e^{-D} \left(\frac{F}{A-B} \right)^m J_m(F), \quad (6.10)$$

где $F = (B^2 - A^2)^{1/2}$, $\operatorname{tg} \varphi = iB/A$. Для нечетных номеров угловых гармоник $n = 2m + 1$ коэффициенты (6.9) будут равны нулю:

$$\begin{aligned} 2\pi C_{2m+1}(r) &= e^{-D} \int_0^{2\pi} \exp[-i(2m+1)\varphi - A \cos 2\varphi - iB \sin 2\varphi] d\varphi = \\ &= e^{-D} \left\{ \int_0^{\pi} \exp[-i(2m+1)\varphi - A \cos 2\varphi - iB \sin 2\varphi] d\varphi + \right. \\ &+ \left. \int_0^{\pi} \exp[-i(2m+1)(\varphi + \pi) - A \cos 2(\varphi + \pi) - iB \sin 2(\varphi + \pi)] d\varphi \right\} = \\ &= e^{-D} \int_0^{\pi} [1 + (-1)^{2m+1}] \exp[-i(2m+1)\varphi - A \cos 2\varphi - iB \sin 2\varphi] d\varphi = 0. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Тогда для коэффициентов (6.9) получим:

$$C_n(r) = \begin{cases} e^{-D} \left(\frac{F}{A-B} \right)^{n/2} J_{n/2}(F), & n = 2m, \\ 0, & n = 2m + 1. \end{cases} \quad (6.12)$$

Из (6.12) видно, что коэффициенты при угловых гармониках с положительными и отрицательными номерами различаются по модулю ($n = 2m$):

$$\begin{aligned} |C_{2m}(r)|^2 &= e^{-2\operatorname{Re}D} \left| \frac{A+B}{A-B} \right|^m |J_m(F)|^2, \\ |C_{-2m}(r)|^2 &= e^{-2\operatorname{Re}D} \left| \frac{A-B}{A+B} \right|^m |J_m(F)|^2. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Нормированный ОУМ для разложения (6.6) можно представить в виде выражения:

$$\frac{J_z}{W} = \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} n \bar{C}_n}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{C}_n}, \quad (6.14)$$

где

$$\bar{C}_n = \int_0^{\infty} |C_n(r)|^2 r dr.$$

Далее полагаем $\alpha = \pi/4$, чтобы $a - b$ было вещественным, и чтобы можно было убрать знак модуля у квадрата функции Бесселя. Коэффициенты в сумме (6.14) для четных номеров имеют вид:

$$\begin{aligned} \bar{C}_{2m} &= \left| \frac{a-b+2c}{a-b-2c} \right|^m \int_0^{\infty} \exp[-\operatorname{Re}(a+b)r^2] \times \\ &\times J_m^2 \left(\frac{r^2}{2} \sqrt{4c^2 - (a-b)^2} \right) r dr. \end{aligned} \quad (6.15)$$

В общем же случае, при $\alpha \neq \pi/4$, вместо (6.15) получится более громоздкое выражение:

$$\begin{aligned} \bar{C}_{2m} &= \int_0^{\infty} e^{-2\operatorname{Re}D} \left| \frac{A+B}{A-B} \right|^m |J_m(F)|^2 r dr = \\ &= \left| \frac{a-b+2c}{a-b-2c} \right|^m \int_0^{\infty} e^{-\operatorname{Re}(a+b)r^2} J_m(Gr^2) J_m(G^*r^2) r dr = \\ &= \frac{1}{2} \left| \frac{a-b+2c}{a-b-2c} \right|^m \int_0^{\infty} e^{-\operatorname{Re}(a+b)u} J_m(Gu) J_m(G^*u) du. \end{aligned} \quad (6.16)$$

где $G = [4c^2 - (a-b)^2]^{1/2}/2$.

Интеграл в (6.15) можно вычислить с помощью справочного [103] интеграла

$$\int_0^{\infty} e^{-pr^2} J_m^2(qr^2) r dr = (2\pi q)^{-1} Q_{|m|-1/2} \left(1 + \frac{p^2}{2q^2} \right), \quad (6.17)$$

для вычисления интеграла в (6.16) можно также использовать справочный интеграл [103]:

$$\int_0^{\infty} e^{-px} J_\nu(bx) J_\nu(cx) dx = \frac{1}{\pi \sqrt{bc}} Q_{\nu-1/2} \left(\frac{p^2 + b^2 + c^2}{2bc} \right), \quad (6.18)$$

где $Q_\nu(x)$ — шаровая функция или функция Лежандра 2-го рода ($x > 1$):

$$\begin{aligned} Q_\nu(x) &= \sqrt{\pi} (2x)^{-\nu-1} \Gamma(\nu+1) \times \\ &\times \Gamma^{-1}(\nu+3/2)_2 F_1 \left(\frac{\nu+1}{2}, \frac{\nu+2}{2}, \nu + \frac{3}{2}, x^{-2} \right), \end{aligned} \quad (6.19)$$

где $\Gamma(x)$ — гамма функция, ${}_2F_1(a, b, c, x)$ — гипергеометрическая функция [194]. Тогда вместо (6.15) можно записать:

$$\bar{C}_{2m} = \pi^{-1} \left(\frac{c+a-b}{-a+b} \right)^m [c^2 - (a-b)^2]^{-1/2} \times \\ \times Q_{|m|-1/2} \left[1 + \frac{2(a+b)^2}{c^2 - (a-b)^2} \right], \quad (6.20)$$

или для общего случая угла наклона $\alpha \neq \pi/4$ вместо (6.20) получим:

$$\bar{C}_{2m} = \frac{1}{2\pi |G|} \left| \frac{a-b+2c}{a-b-2c} \right|^m Q_{|m|-1/2} \left(\frac{\operatorname{Re}^2(a+b) + 2\operatorname{Re}G^2}{2|G|^2} \right). \quad (6.21)$$

Пусть $|G|^2 \approx 0$. Тогда аргумент функции Лежандра в (6.21) стремится к бесконечности, и из асимптотики функции Лежандра при $x \gg 1$ [194]

$$Q_{|\nu|}(x) \approx \sqrt{\pi} (2x)^{-|\nu|-1} (|\nu|+1)^{-1} (|\nu|+3/2) \quad (6.22)$$

следует выражение для коэффициентов разложения в формуле для ОУМ (6.14):

$$\bar{C}_{2m} = \frac{1}{2^{2|m|+1} \sqrt{\pi}} \frac{(|m|+1/2) |a-b+2c|^{|m|+m} |a-b-2c|^{|m|-m}}{(|m|+1) \operatorname{Re}^{2|m|+1}(a+b)}. \quad (6.23)$$

Заметим, что аргумент функции Лежандра в (6.20) комплексный. Далее для определенности опять пусть цилиндрическая линза повернута на угол α , равный 45 градусов. Когда гауссов пучок круглый ($w_y = w_x$), тогда в (6.20) $a-b=0$, и коэффициенты (6.20) при угловых гармониках с номерами m и $-m$ равны, т.е. ОУМ (6.14) равен нулю. При $2c = b-a$, или когда $f^{-1} = z_{0y}^{-1} - z_{0x}^{-1}$ ($z_{0x} = kw_x^2/2$, $z_{0y} = kw_y^2/2$ — длины Рэлея), все коэффициенты (6.20) при $m > 0$ равны нулю, а при $m < 0$ коэффициенты (6.20) отличны от нуля:

$$\bar{C}_{2m} = \begin{cases} 0, & m > 0, \\ \frac{f}{k\sqrt{\pi}} \frac{(|m|+1/2)}{(|m|+1)} \left(\frac{w_y^2 + w_x^2}{w_x^2 - w_y^2} \right)^{-2|m|-1}, & m \leq 0. \end{cases} \quad (6.24)$$

При этом ОУМ (6.14) отличен от нуля. Если же, наоборот, $2c = a-b$, т.е. $f^{-1} = z_{0x}^{-1} - z_{0y}^{-1}$, то все коэффициенты при $m < 0$ равны нулю, а при $m > 0$ коэффициенты (6.20) отличны от нуля:

$$\bar{C}_{2m} = \begin{cases} \frac{f}{k\sqrt{\pi}} \frac{(m+1/2)}{(m+1)} \left(\frac{w_x^2 + w_y^2}{w_y^2 - w_x^2} \right)^{-2m-1}, & m \geq 0, \\ 0, & m < 0. \end{cases} \quad (6.25)$$

При этом также ОУМ (6.14) отличен от нуля. Из (6.25) видно, что коэффициенты $|\bar{C}_n|$ ряда (6.14) с увеличением номера убывают до нуля. При больших m , вместо (6.25) можно записать ($m > 0$):

$$\bar{C}_{2m} \approx \frac{f}{k\sqrt{\pi m}} \left(\frac{w_y^2 - w_x^2}{w_y^2 + w_x^2} \right)^{2m+1}. \quad (6.26)$$

Далее, пусть для определенности $a-b > 0$ или $w_y > w_x$, и пусть $c > a-b$, т.е. $f^{-1} > z_{0y}^{-1} - z_{0x}^{-1}$. Тогда коэффициенты (6.20) с положительными номерами $m > 0$ будут больше, коэффициентов с отрицательными номерами: $\bar{C}_{2m} > \bar{C}_{-2m}$. То есть больший вклад в ОУМ будут давать угловые гармоники $\exp(i2m\varphi)$ с положительными номерами, и значит ОУМ > 0 . Если, наоборот, $a-b < 0$, или $w_y < w_x$ и $f^{-1} < z_{0y}^{-1} - z_{0x}^{-1}$, тогда $\bar{C}_{2m} < \bar{C}_{-2m}$ и ОУМ < 0 . Эти выводы согласуются с формулой (6.4).

Таким образом, мы показали, что эллиптический гауссов пучок с астигматизмом (6.1) обладает ОУМ (6.14), в который дают вклад только все четные угловые гармоники, как с положительным топологическим зарядом $2m$, так и отрицательным $-2m$, хотя их вклады разные по величине $\bar{C}_{2m} \neq \bar{C}_{-2m}$. Причем при $m=0$ коэффициент \bar{C}_0 отличен от нуля и равен:

$$\bar{C}_0 = \frac{1}{\pi \sqrt{c^2 - (a-b)^2}} Q_{-1/2} \left[1 + \frac{2(a+b)^2}{c^2 - (a-b)^2} \right]. \quad (6.27)$$

Значение функции Лежандра в (6.27) можно получить через полный эллиптический интеграл [194]:

$$Q_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{1+x}} K \left(\sqrt{\frac{2}{1+x}} \right), \quad (6.28) \\ K(t) = \int_0^1 [(1-x^2)(1-tx^2)]^{-1/2} dx.$$

6.1.3. Моделирование. Проверим численно полученные выше отношения. Рассчитаем ОУМ по исходной формуле (6.4) и по формуле через разложение по угловым гармоникам (6.14). Параметры расчета: длина волны $\lambda = 532$ нм, угол наклона цилиндрической линзы $\alpha = \pi/4$, радиусы перетяжки эллиптического гауссова пучка $w_x = 20\lambda$ и $w_y = 400\lambda$, фокусное расстояние цилиндрической линзы $f = 1/(1/z_{0x} - 1/z_{0y}) \approx 1260\lambda$. Распределение модулей коэффициентов $|\bar{C}_n|$ показано на рис.6.1 (сплошная кривая). Для других радиусов перетяжки $w_x = 10\lambda$, $w_y = 100\lambda$ и фокусного расстояния цилиндрической линзы $f = 1/(1/z_{0x} - 1/z_{0y}) \approx 317\lambda$ распределение модулей коэффициентов $|\bar{C}_n|$ в формуле (6.14) показано на рис.6.1 (прерывистая кривая).

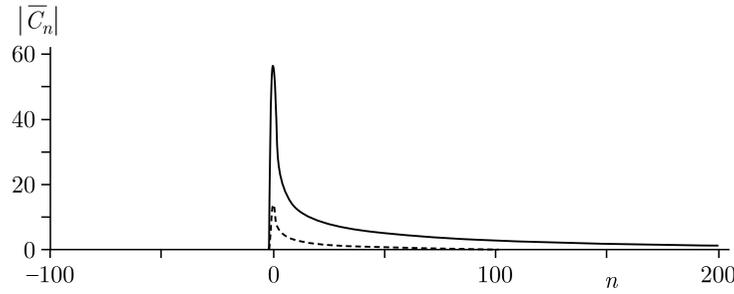


Рис. 6.1. Распределение $|\overline{C}_n|$ (только четные номера, нечетные равны нулю) для двух разных пучков и фокусных расстояний цилиндрической линзы: $w_x = 20\lambda$, $w_y = 400\lambda$, $f = 1260\lambda$ (сплошная кривая), $w_x = 10\lambda$, $w_y = 100\lambda$, $f = 317\lambda$ (прерывистая кривая)

Для первого случая (сплошная кривая на рис. 6.1) ОУМ, рассчитанный по формуле (6.4), равен 99,500625, а ОУМ, рассчитанный по формуле (6.14), равен 99,48454. Для второго случая (прерывистая кривая на рис. 6.1) ОУМ, рассчитанный по формуле (6.4), равен 24,5025, а ОУМ, рассчитанный по формуле (6.14), равен 24,5025. Во втором случае видим совпадение с точностью до четырех знаков после запятой. В расчете по формуле (6.14) было учтено 2000 коэффициентов $|\overline{C}_n|$. Из рис. 6.1 видно, что чем меньше ОУМ, тем меньше величина отличных от нуля коэффициентов разложения по угловым гармоникам $|\overline{C}_n|$ (прерывистая кривая под сплошной кривой).

6.1.4. Астигматический пучок после скрещенных цилиндрических линз и в ABCD-системе. Рассмотрим вместо поля (6.1) более общее световое поле, когда эллиптический гауссов пучок проходит через две скрещенные цилиндрические линзы с разным фокусным расстоянием f_x , f_y , оси которых наклонены под углом α к горизонтальной оси. Комплексная амплитуда такого поля в начальной плоскости ($z = 0$) имеет вид

$$E(x, y) = \exp\left(-\frac{x^2}{w_x^2} - \frac{y^2}{w_y^2} - \frac{ikx'^2}{2f_x} - \frac{iky'^2}{2f_y}\right), \quad (6.29)$$

где

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha, \\ y' = y \cos \alpha - x \sin \alpha, \end{cases} \quad (6.30)$$

Тогда, подставив поле (6.29) в (6.2), (6.3) можно найти нормированный ОУМ:

$$\frac{J_z}{W} = \frac{k}{8} \left(\frac{1}{f_y} - \frac{1}{f_x} \right) (w_x^2 - w_y^2) \sin 2\alpha. \quad (6.31)$$

Из сравнения (6.31) с (6.4) видно, что если фокусные расстояния цилиндрических линз имеют разные знаки (одна линза собирающая, а другая — рассеивающая), то ОУМ можно увеличить в 2 раза по сравнению с использованием только одной цилиндрической линзы.

Далее рассмотрим распространение поля (6.29) через ABCD-систему, тогда для комплексной амплитуды на выходе можно получить выражение:

$$E_2(\xi, \eta) = \frac{-ik}{B\sqrt{G}} \exp\left[\frac{ikD}{2B}(\xi^2 + \eta^2) - \frac{k^2}{B^2} \frac{P_{xx}\eta^2 + P_{yy}\xi^2 - P_{xy}\xi\eta}{G}\right], \quad (6.32)$$

где

$$\begin{aligned} P_{xx} &= \frac{1}{w_x^2} + \frac{ik}{2f_x} \cos^2 \alpha + \frac{ik}{2f_y} \sin^2 \alpha - \frac{ikA}{2B}, \\ P_{yy} &= \frac{1}{w_y^2} + \frac{ik}{2f_x} \sin^2 \alpha + \frac{ik}{2f_y} \cos^2 \alpha - \frac{ikA}{2B}, \\ P_{xy} &= \frac{ik}{2} \left(\frac{1}{f_x} - \frac{1}{f_y} \right) \sin 2\alpha, \quad G = 4P_{xx}P_{yy} - P_{xy}^2. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Распределение интенсивности поля (6.29) на выходе ABCD-системы будет иметь вид

$$I_2(\xi, \eta) = \frac{k^2}{B^2|G|} \exp\left[-\frac{2k^2}{B^2|G|^2} \Psi(\xi, \eta)\right], \quad (6.34)$$

где

$$\Psi(\xi, \eta) = \text{Re}\{P_{yy}G^*\}\xi^2 + \text{Re}\{P_{xx}G^*\}\eta^2 - \text{Re}\{P_{xy}G^*\}\xi\eta.$$

Из (6.34) видно, что интенсивность имеет вид эллиптического гауссова пучка, как и в начальной плоскости (6.29). Из формулы (6.32) можно получить формулу для плотности ОУМ в полярных координатах (r, φ) на любом расстоянии z при условии, что цилиндрическая линза только одна с фокусным расстоянием f_x , а также $f_y \rightarrow \infty$, $\alpha = \pi/4$, $A = 1$, $B = z$:

$$\begin{aligned} \frac{j_z}{|E_2|^2} &= \\ &= kr^2 \frac{2z_{0x}z_{0y} [f_x z^2 + z_{0x}z_{0y}(z - f_x)] \cos 2\varphi + f_x(z_{0y}^2 - z_{0x}^2)z(z - 2f_x) \sin 2\varphi}{4[f_x z^2 + z_{0x}z_{0y}(z - f_x)]^2 + (z_{0x} + z_{0y})^2 z^2 (z - 2f_x)^2}, \end{aligned} \quad (6.35)$$

где $z_{0x} = kw_x^2/2$, $z_{0y} = kw_y^2/2$ — длины Рэлея. В частном случае на двойном фокусном расстоянии из (6.35) следует простая формула для плотности ОУМ:

$$\frac{j_z}{|E_2|^2} = \frac{k}{2f_x} \frac{z_{0x}z_{0y}}{4f_x^2 + z_{0x}z_{0y}} r^2 \cos 2\varphi. \quad (6.36)$$

Из (6.35) следует, что нормированная плотность ОУМ зависит от расстояния до линзы z . Причем числитель пропорционален z^2 , а знаменатель — z^4 . То есть плотность ОУМ (6.35) убывает с расстоянием квадратично, так же как убывает интенсивность гауссова пучка из-за его расходимости.

Далее рассмотрим эллиптический гауссов пучок (6.1) не в плоскости перетяжки, а в любой другой плоскости на расстоянии z от плоскости перетяжки. Комплексная амплитуда на расстоянии z от перетяжки пучка (6.1) будет иметь вид:

$$E(x, y, z) = [q_x(z)q_y(z)]^{-1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{w_x^2 q_x(z)} - \frac{y^2}{w_y^2 q_y(z)}\right), \quad (6.37)$$

где

$$q_x(z) = 1 + \frac{iz}{z_{0x}}, \quad q_y(z) = 1 + \frac{iz}{z_{0y}}, \quad (6.38)$$

а длины Рэлея как в (6.35). Если в поле (6.37) поместить цилиндрическую линзу с фокусным расстоянием f , образующая которой повернута в поперечной плоскости на угол α , комплексная амплитуда света сразу за цилиндрической линзой будет иметь вид:

$$E(x, y, z) = [q_x(z)q_y(z)]^{-1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{w_x^2 q_x(z)} - \frac{y^2}{w_y^2 q_y(z)}\right) \times \exp\left(-\frac{ikx^2 \cos^2 \alpha}{2f} - \frac{iky^2 \sin^2 \alpha}{2f} - \frac{ikxy \sin 2\alpha}{2f}\right). \quad (6.39)$$

Нормированный ОУМ пучка (6.39) имеет вид:

$$\frac{J_z}{W} = \left(\frac{k \sin 2\alpha}{8f}\right) (w_y^2 |q_y|^2 - w_x^2 |q_x|^2). \quad (6.40)$$

Из (6.40) видно, что знак и величина ОУМ зависит от расстояния z от перетяжки эллиптического гауссова пучка до плоскости размещения цилиндрической линзы. Это более ясно видно, если записать (6.40) в другом виде:

$$\frac{J_z}{W} = \left(\frac{k \sin 2\alpha}{8f}\right) (w_y^2 - w_x^2) \left(1 - \frac{4z^2}{k^2 w_x^2 w_y^2}\right). \quad (6.41)$$

Из (6.41) видно, что, если цилиндрическую линзу поместить на расстоянии $z = kw_x w_y/2$, то ОУМ будет равен нулю, так как на этом

расстоянии эллиптический гауссов пучок имеет круглое сечение. Если $z < kw_x w_y/2$, ОУМ положительный, если $z > kw_x w_y/2$, то отрицательный. При больших z ОУМ растет по модулю квадратично от z . Хотя заметим, что при ранее выбранных параметрах гауссова пучка ($w_x = 2$ мм, $w_y = 1$ мм, $\lambda = 0,5$ мкм), расстояние, на котором ОУМ от максимального (при $z = 0$) уменьшается до нуля, равно $z = 4\pi$ метров. Поэтому для получения максимального ОУМ следует помещать цилиндрическую линзу в перетяжку эллиптического гауссова пучка.

В этом разделе для астигматического гауссова пучка, который формируется при фокусировке эллиптического гауссова пучка цилиндрической линзой, получено выражение для нормированного ОУМ в виде ряда из функций Лежандра второго рода с полуцелыми номерами. Если параметры эллиптического гауссова пучка и цилиндрической линзы удовлетворяют условию $f^{-1} = z_{0y}^{-1} - z_{0x}^{-1}$, то вклад в ОУМ вносят только угловые гармоники с отрицательными топологическими зарядами $2m < 0$. И, наоборот, если имеет место условие $f^{-1} = z_{0x}^{-1} - z_{0y}^{-1}$, то вклад в ОУМ вносят только угловые гармоники с положительными четными номерами $2m > 0$. Во всех случаях самый большой по величине будет нулевой коэффициент в разложении астигматического поля по угловым гармоникам. Но так как этот коэффициент умножается на ноль (нулевой топологический заряд), то он не дает вклад в ОУМ. Но из-за большого вклада нулевой угловой гармоники в амплитуду астигматического поля в распределении интенсивности этого поля нет изолированных нулей, и поэтому точек с сингулярной фазой. Такой астигматический пучок выглядит как безвихревой, хотя он обладает ОУМ.

Мы получили также явное выражение для нормированного ОУМ астигматического гауссова пучка, сфокусированного двумя скрещенными цилиндрическими линзами (собирающей и рассеивающей); этот пучок имеет больший ОУМ, чем сфокусированный только одной собирающей. Получили явную формулу для нормированной плотности ОУМ астигматического гауссова пучка, прошедшего ABCD-систему, и явную формулу для нормированного ОУМ для астигматического пучка, если цилиндрическая линза расположена не в перетяжке эллиптического гауссова пучка, а на произвольном расстоянии от перетяжки.

6.2. Вращающийся астигматический пучок Эрмита–Гаусса

Лазерные пучки с орбитальным угловым моментом (ОУМ) активно исследуются в настоящее время из-за широкого применения таких пучков для оптического захвата и вращения микрочастиц [176] и холодных атомов [177], в фазово-контрастной микроскопии [178], в микроскопии со стимулированным истощением излучения [179], в оптической клас-

сической [180] и квантовой [144] информатике. Чаще всего пучками с ОУМ являются вихревые лазерные пучки с сингулярной фазой и вихревым (спиральным) волновым фронтом. Комплексная амплитуда таких пучков имеет общий вид $A(r)\exp(in\varphi)$, где $A(r)$ — амплитуда пучка, (r, φ) — полярные координаты, n — топологический заряд оптического вихря. Плотность ОУМ и полный ОУМ на один фотон таких пучков равны топологическому заряду n . Возникают два вопроса. Все ли лазерные пучки с ОУМ имеют дислокацию фазы и вихревой волновой фронт, или есть другие типы пучков с ОУМ? И какой максимальный ОУМ можно получить на практике?

Ответ на первый вопрос положительный, и его можно найти в работе [160]. В [160] вычислили ОУМ для эллиптического гауссова пучка, сфокусированного цилиндрической линзой. В этой работе с помощью теоретической оценки показано, что у такого пучка ОУМ может быть равен 10000 на фотон. Правда, практически в [160] реализован только пучок с ОУМ, равным 25 на фотон. Заметим, что идея использования цилиндрической линзы для придания пучку ОУМ была впервые высказана в [181]. В [181] было экспериментально показано, что пучок Эрмита–Гаусса, не обладающий ОУМ, после цилиндрической линзы на определенном расстоянии и при определенных условиях преобразуется в пучок Лагерра–Гаусса с ОУМ.

В работах [182–193] пытались ответить на второй вопрос и получить как можно большее значение ОУМ. В [182] предложено увеличивать ОУМ с помощью набора гауссовых вихревых пучков, центры которых расположены на окружности, а оптические оси отдельных пучков и общая оптическая ось являются скрещенными прямыми. В [182] показано, что ОУМ такого составного пучка может быть равен 204 на фотон. В [183] вместо гауссовых пучков предлагается использовать небольшие отверстия в непрозрачном экране, как точечные источники. Если их расположить в виде спирали, то в совокупности они сформируют вихревой пучок с ОУМ. В [183] практически реализован пучок с ОУМ, равным 3. В [184] показано, что при острой фокусировке оптического вихря с большим топологическим зарядом уменьшается контраст или видность боковых лепестков. В [184] практически фокусировался пучок с ОУМ, равным 15 на фотон. В [185] предложен интересный способ определения топологического заряда оптического вихря с помощью кольцевой дифракционной решетки. Экспериментально показано, что таким способом можно определить топологический заряд ± 25 . В [186] экспериментально с помощью трехволнового смешения в нелинейной среде Керра сформированы вихревые гармоники с ОУМ до 30 на фотон. В [187] практически осуществили с помощью цифрового многоэлементного зеркала (с числом микрозеркал 1024×768) генерацию идеального оптического вихря с топологическим зарядом 90. В [188] с помощью жидкокристаллического модулятора света

(число элементов 1900×1200) сформировали оптический вихрь с топологическим зарядом 200, что позволило вращать микрочастицы диаметром 1,4 мкм со скоростью 500 мкм/с. В [189] также с помощью модулятора света (число отсчетов 1920×1080) сформированы перепутанные пары фотонов с ОУМ ± 300 на фотон. В [190] с помощью спирального фазового зеркала, полученного в пластинке алюминия алмазным резцом, экспериментально сформирован оптический вихрь с топологическим зарядом 100. Эти же авторы [191] с помощью усовершенствованной технологии на подложке из алюминия диаметром 75 мм и шероховатостью 3 нм создали спиральное зеркало, способное формировать оптические вихри с топологическим зарядом 1020. В [191] также интерферометрически доказали, что сформированный зеркалом оптический вихрь имеет топологический заряд 5050. В [192] с помощью электронной литографии в резисте создали голограмму диаметром 80 мкм с разрешением 35 нм и высотой рельефа 25 нм, которая позволила сформировать вихревой пучок электронов с энергией 0,5–1 эВ с топологическим зарядом 1000. И, наконец, в [193] с помощью спирального алюминиевого зеркала диаметром около 50 мм для длины волны 810 нм сформированы фотоны, перепутанные по ОУМ и поляризации. Причем квантовый ОУМ фотонов был равен ± 10010 . Это максимальное значение ОУМ, полученное на сегодняшний день.

В предыдущих работах авторов [195, 196] были получены точные формулы для ОУМ астигматического гауссова пучка, отличные от формул, полученных в [160]. В данном разделе мы обобщаем результаты работ [195, 196] и рассматриваем астигматический пучок Эрмита–Гаусса. Будет показано, что эллиптический пучок Эрмита–Гаусса с номером $(0, n)$ после цилиндрической линзы приобретает ОУМ, который в n раз больше, чем у эллиптического гауссова пучка после цилиндрической линзы. Теоретическая оценка дает значение для ОУМ такого пучка более 100000 на фотон. Приведены также экспериментальные результаты для астигматического гауссова пучка: полученный ОУМ отличался от теоретического на 6 %.

6.2.1. Безвихревой пучок с ОУМ. В этом подразделе, для удобства читателя, первые четыре формулы взяты из [181]. Обычно рассматриваются параксиальные вихревые лазерные пучки, обладающие орбитальным угловым моментом (ОУМ). У таких пучков есть точки сингулярности — это изолированные нули интенсивности, в которых фаза не определена, и вокруг которых изофазная поверхность волнового фронта имеет спиральную форму. Но, оказывается, есть простые световые поля, которые обладают ОУМ и не имеют изолированных нулей интенсивности с вихревой фазой. Рассмотрим гауссов эллиптический пучок, в перетяжке которого расположена цилиндрическая линза [160], образующая которой повернута в плоскости перетяжки

на угол α . Комплексная амплитуда света сразу за цилиндрической линзой имеет вид

$$E(x, y) = \exp\left(-\frac{x^2}{w_x^2} - \frac{y^2}{w_y^2}\right) \times \exp\left(-\frac{ikx^2 \cos^2 \alpha}{2f} - \frac{iky^2 \sin^2 \alpha}{2f} - \frac{ikxy \sin 2\alpha}{2f}\right), \quad (6.42)$$

где w_x и w_y — радиусы перетяжки гауссова пучка по декартовым осям, f — фокусное расстояние тонкой цилиндрической линзы, образующая которой имеет угол с вертикальной осью y , равный α (линза повернута против часовой стрелки), k — волновое число света. Нормированный ОУМ в паракиальном случае вычисляется по формулам [160] (с точностью до постоянных):

$$J_z = \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{E}(x, y) \left(x \frac{\partial E(x, y)}{\partial y} - y \frac{\partial E(x, y)}{\partial x} \right) dx dy, \quad (6.43)$$

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{E}(x, y) E(x, y) dx dy, \quad (6.44)$$

где J_z — проекция на оптическую ось ОУМ, W — плотность энергии (мощности) света, Im — мнимая часть числа, \bar{E} — комплексно сопряженная амплитуда к амплитуде (6.42). Подставляя (6.42) в (6.43) и (6.44), получим простое выражение для нормированного ОУМ светового поля (6.42):

$$\frac{J_z}{W} = \left(\frac{k \sin 2\alpha}{8f} \right) (w_y^2 - w_x^2). \quad (6.45)$$

Из (6.45) видно, что ОУМ равен нулю, если гауссов пучок имеет круглое сечение ($w_x = w_y$) или линза не имеет наклона к вертикальной оси ($\alpha = 0$). При наклоне в 45 градусов ОУМ (6.45) максимальный, при прочих равных условиях. Из (6.45) также видно, что ОУМ пучка (6.42) в общем случае дробный, хотя может быть и целым. Чем меньше фокусное расстояние цилиндрической линзы, тем больше ОУМ пучка, и чем больше степень эллиптичности пучка (6.42), тем больше его ОУМ. Знак ОУМ определяется тем, по какой оси, y или x , больше вытянут гауссов пучок в перетяжке. Преимущество пучка (6.42) в том, что он может быть реализован без дополнительных элементов, без модулятора света, спиральной фазовой пластинки или голограммы с «вилочкой». Для его формирования надо всего три цилиндрические линзы, две из которых формируют эллиптическую перетяжку гауссова пучка, а третья — создает ОУМ.

Оценим величину ОУМ для конкретных значений величин, входящих в (6.45). Гауссов пучок считается паракиальным, если радиусы

его перетяжки намного больше длины волны, пусть они будут равны $w_x = 2$ мм и $w_y = 1$ мм, фокусное расстояние пусть будет равно $f = 10$ мм, а длина волны $\lambda = 0,5$ мкм, наклон линзы равен 45 градусов ($\alpha = \pi/4$). Тогда ОУМ в (6.45) будет равен 471,24.

Интересно рассмотреть нормированную плотность ОУМ пучка (6.42). В этом случае, вместо (6.43) и (6.44) надо использовать формулы:

$$j_z = \text{Im} \left[\bar{E}(x, y) \left(x \frac{\partial E(x, y)}{\partial y} - y \frac{\partial E(x, y)}{\partial x} \right) \right], \quad (6.46)$$

$$I = \bar{E}(x, y) E(x, y). \quad (6.47)$$

Подставляя (6.42) в (6.46) и (6.47), получим нормированную плотность ОУМ пучка (6.42):

$$\frac{j_z}{I} = \frac{k}{2f} [(y^2 - x^2) \sin 2\alpha + 2xy \cos 2\alpha]. \quad (6.48)$$

Из (6.48) видно, что плотность ОУМ не зависит от радиуса перетяжки гауссова пучка, т.е. ОУМ будет одинаковым и для круглого и для эллиптического гауссова пучка. При $\alpha = 0, \pi/2$ ОУМ (6.48) равен нулю на декартовых осях и максимальный по модулю на двух линиях под углами ± 45 градусов к оси x . И, наоборот, при $\alpha = \pm \pi/4$ ОУМ (6.48) равен нулю на двух линиях под углами ± 45 градусов к оси x и максимальный по модулю вдоль декартовых осей x и y . На окружности любого радиуса R с центром в начале координат ОУМ зависит только от полярного угла φ и равен:

$$\frac{j_z}{I} = \frac{k}{2f} R \sin [2(\varphi - \alpha)]. \quad (6.49)$$

Из (6.49) видно, что при обходе вокруг центра при любом R ОУМ меняет знак дважды: при $0 < \varphi - \alpha < \pi/2$ ОУМ положительный, при $\pi/2 < \varphi - \alpha < \pi$ — отрицательный, при $\pi < \varphi - \alpha < 3\pi/2$ — положительный и при $3\pi/2 < \varphi - \alpha < 2\pi$ — отрицательный. Это говорит о том, что полный ОУМ для круглого гауссова пучка ($w_x = w_y$) будет равен нулю, так как совокупность положительных и отрицательных значений плотности ОУМ (6.49) компенсируют друг друга. Если же гауссов пучок эллиптический, то полный ОУМ (6.45) будет отличным от нуля. У обычных вихревых пучков с амплитудой $A(r) \exp(in\varphi)$ нормированная плотность ОУМ постоянная $j_z/I = n$, $I = A^2(r)$, в отличие от пучка (1), у которого нормированная плотность ОУМ (6.48) знакопеременная и зависит от координат. То есть в каждой точке в поперечном сечении вихревого пучка $A(r) \exp(in\varphi)$ захваченная микрочастица будет получать локальный момент для вращения в одном и том же направлении. А микрочастица, захваченная в пучок (6.42), в некоторых точках в поперечном сечении пучка будет получать момент для вращения (относительно центра масс, который совпадает с центром пучка и началом координат) по часовой стрелке, а в других точках — против

часовой стрелки. Микрочастица будет вращаться как одно целое, если сумма этих локальных моментов не будет равна нулю.

Далее, в отличие от [160], мы покажем, что эллиптический гауссов пучок после цилиндрической линзы вращается. Получим формулы, описывающие распространение пучка (6.42) и покажем, что при его распространении не возникает изолированных нулей интенсивности, т.е. пучок (6.42) не является вихревым или сингулярным [182–193]. Преобразование Френеля комплексной амплитуды (6.42) имеет вид:

$$E(\xi, \eta, z) = \frac{-ik}{z\sqrt{p(z)q(z)}} \exp [A(z)\xi^2 + B(z)\eta^2 + C(z)\xi\eta], \quad (6.50)$$

где

$$\begin{aligned} A(z) &= \frac{ik}{2z} - \frac{k^2}{4z^2 p(z)} + \frac{k^4 \sin^2 2\alpha}{64f^2 z^2 p^2(z)q(z)}, \\ B(z) &= \frac{ik}{2z} - \frac{k^2}{4z^2 q(z)}, \quad C(z) = \frac{ik^3 \sin 2\alpha}{8fz^2 p(z)q(z)}, \\ p(z) &= \frac{1}{w_x^2} + \frac{ik}{2z_x}, \quad q(z) = \frac{1}{w_y^2} + \frac{ik}{2z_y} + \frac{k^2 \sin^2 2\alpha}{16f^2 p(z)}, \\ z_x &= \frac{zf}{z \cos^2 \alpha - f}, \quad z_y = \frac{zf}{z \sin^2 \alpha - f}. \end{aligned} \quad (6.51)$$

Из (6.50) видно, что гауссов пучок (6.42) при распространении остается гауссовым пучком, но меняется масштабно и вращается. Формула (6.50) существенно упрощается при $\alpha = \pi/4$ и $z = 2f$, так как при этих параметрах $z_x \rightarrow \infty$, $z_y \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} E(\xi, \eta, z = 2f) &= \\ &= -2i\gamma^{-1} \exp \left[\frac{ik}{4f} (\xi^2 + \eta^2) - \frac{\xi^2}{w_y^2 \gamma^2} - \frac{\eta^2}{w_x^2 \gamma^2} + \frac{ik\xi\eta}{2f\gamma^2} \right]. \end{aligned} \quad (6.52)$$

где

$$\gamma = \left(1 + \frac{16f^2}{k^2 w_x^2 w_y^2} \right)^{1/2}. \quad (6.53)$$

Из (6.52) видно, что эллиптический гауссов пучок (6.42) на расстоянии $z = 2f$ повернулся на 90 градусов и уширился, так как $\gamma > 1$.

6.2.2. Формирование эллиптического гауссова пучка. В [160] эллиптический гауссов пучок формировался с помощью двух цилиндрических линз. Но можно обойтись всего одной цилиндрической линзой, чтобы создать расходящийся или сходящийся эллиптический гауссов пучок. Рассмотрим подробнее эту ситуацию. Пусть в перетяжке обычного гауссова пучка с круглым сечением и радиусом перетяжки w размещена цилиндрическая линза с кривизной вдоль оси x и фокусным

расстоянием f_1 . Тогда комплексная амплитуда эллиптического гауссова пучка на расстоянии z за цилиндрической линзой будет равна

$$E(x, y, z) = (q_0(z)q_1(z))^{-1/2} \exp \left(-\frac{x^2}{w^2 q_2(z)} - \frac{y^2}{w^2 q_0(z)} \right), \quad (6.54)$$

где

$$\begin{aligned} q_0(z) &= 1 + \frac{iz}{z_0}, \\ q_1(z) &= q_0(z) - \frac{z}{f_1}, \\ q_2(z) &= q_1(z) \left(1 + \frac{iz_0}{f_1} \right)^{-1}, \\ z_0 &= \frac{kw^2}{2}. \end{aligned} \quad (6.55)$$

Из (6.54), (6.55) видно, что при $f_1 \rightarrow \infty$ получается амплитуда обычного гауссова пучка:

$$E(x, y, z) = (q_0(z))^{-1} \exp \left(-\frac{x^2 + y^2}{w^2 q_0(z)} \right), \quad (6.56)$$

Если в поле (6.54) поместить цилиндрическую линзу с фокусным расстоянием f , образуя которой повернута в плоскости перетяжки на угол α , комплексная амплитуда света сразу за цилиндрической линзой будет иметь вид

$$\begin{aligned} E(x, y, z) &= (q_0(z)q_1(z))^{-1/2} \exp \left(-\frac{x^2}{w^2 q_2(z)} - \frac{y^2}{w^2 q_0(z)} \right) \times \\ &\times \exp \left(-\frac{ikx^2 \cos^2 \alpha}{2f} - \frac{iky^2 \sin^2 \alpha}{2f} - \frac{ikxy \sin 2\alpha}{2f} \right). \end{aligned} \quad (6.57)$$

Нормированный ОУМ пучка (6.57) имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{J_z}{W} &= \left(\frac{kw^2 \sin 2\alpha}{8f} \right) \left(\frac{|q_0|^2}{\operatorname{Re}(q_0)} - \frac{|q_2|^2}{\operatorname{Re}(q_2)} \right) = \\ &= \left(\frac{kw^2 \sin 2\alpha}{8f} \right) \left(\frac{z}{f_1} \right) \left(2 - \frac{z}{f_1} \right). \end{aligned} \quad (6.58)$$

Из (6.58) видно, что при $f_1 \rightarrow \infty$ ОУМ стремится к нулю, так как пучок (6.54) стремится к обычному гауссову пучку (6.56). Из (6.58) также следует, что, увеличивая расстояние z между первой цилиндрической линзой с фокусным расстоянием f_1 и второй цилиндрической линзой с фокусным расстоянием f , можно неограниченно увеличивать ОУМ лазерного пучка. При $z = 0$ и $z = 2f_1$ ОУМ (6.58) тоже равен нулю, так как гауссов пучок имеет круглое сечение. Положительный максимальный ОУМ (6.58) будет при $z = f_1$, т.е. если разместить

вторую цилиндрическую линзу в фокусе первой. Тогда вместо (6.58) получим ($z = f_1$):

$$\frac{J_z}{W} = \frac{kw^2 \sin 2\alpha}{8f}. \quad (6.59)$$

Выражение (6.59) совпадает с выражением (6.45) для ОУМ, если принять, что $w_y = w$, $w_x = 0$. При $z > 2f_1$ ОУМ (6.58) меняет знак (становится отрицательным) [197] и далее увеличивается по модулю с ростом z .

6.2.3. Эллиптический пучок Эрмита–Гаусса после цилиндрической линзы. Увеличить ОУМ лазерного пучка можно с помощью формирования эллиптического пучка Эрмита–Гаусса. В отличие от [181] рассмотрим далее эллиптический пучок Эрмита–Гаусса, сфокусированный цилиндрической линзой. Этот пучок является примером светового поля, ОУМ которого может быть в n раз больше, чем (6.45). Амплитуда в начальной плоскости такого поля описывается 1D эллиптическим пучком Эрмита–Гаусса с цилиндрической линзой, наклоненной в начальной плоскости под углом α градусов к декартовым осям:

$$E_n(x, y) = H_n \left(\frac{\sqrt{2}x}{w_x} \right) \exp \left(-\frac{x^2}{w_x^2} - \frac{y^2}{w_y^2} \right) \times \\ \times \exp \left(-\frac{ikx^2 \cos^2 \alpha}{2f} - \frac{iky^2 \sin^2 \alpha}{2f} - \frac{ikxy \sin 2\alpha}{2f} \right). \quad (6.60)$$

Амплитуда поля (6.60) отличается от (6.42) только многочленом Эрмита $H_n(x)$, и они совпадают при $n = 0$. Подставляя (6.60) в (6.43), (6.44), получим нормированный ОУМ для поля (6.60):

$$\frac{J_z}{W} = \left(\frac{k \sin 2\alpha}{8f} \right) (w_y^2 - w_x^2 (2n + 1)). \quad (6.61)$$

Из (6.61) видно, что при $n = 0$ ОУМ (6.61) совпадает с (6.45). Но есть и отличия: если радиусы гауссова пучка равны $w_x = w_y = w$, то ОУМ в (6.45) равен нулю, а ОУМ пучка (6.60) не равен нулю, а вместо (6.61) можно записать:

$$\frac{J_z}{W} = - \left(\frac{kw^2 \sin 2\alpha}{4f} \right) n. \quad (6.62)$$

Из (6.62) следует, что ОУМ поля (6.60) при $w_x = w_y = w$ примерно в $2n$ раз больше по модулю, чем у поля (6.42) (смотри (6.58) при $z = f_1$). Из (6.62) также следует, что при равенстве выражения в скобках единице ОУМ равен по модулю целому числу: $J_z/W = -n$. В [181] было показано, что при определенных условиях пучок Эрмита–Гаусса, не обладающий ОУМ, можно с помощью цилиндрической линзы преобразовать в пучок Лагерра–Гаусса, имеющий ОУМ, равный

$J_z/W = \pm n$. Ниже мы покажем (другим способом, чем в [181]), что пучок (6.60) Эрмита–Гаусса с номером $(0, n)$ при условии, что $w_x = w_y = w$, $\sin 2\alpha = 1$ и $kw^2/(4f) = z_0/(2f) = 1$, где z_0 — длина Рэлея, на расстоянии $z = 2f$, формирует пучок Лагерра–Гаусса с номером $(0, n)$. Действительно, преобразование Френеля комплексной амплитуды пучка (6.60), при перечисленных выше условиях, можно записать в виде:

$$E_n(\xi, \eta, z = 2f) = \left(\frac{-ik}{4\pi f} \right) \exp \left(ik \frac{\xi^2 + \eta^2}{4f} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H_n \left(\frac{\sqrt{2}x}{w} \right) \times \\ \times \exp \left[-\frac{x^2 + y^2}{w^2} - \frac{ik}{2f} (xy + x\xi + y\eta) \right] dx dy. \quad (6.63)$$

Заметим, что условие $z_0/(2f) = 1$ в (6.63) пока не использовалось, это будет сделано позже.

Интеграл по переменной x в выражении (6.63) можно вычислить с помощью справочного интеграла [103]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(cx) \exp \left(ibx - \frac{c^2 x^2}{2} \right) dx = \\ = \frac{i^n \sqrt{2\pi}}{c} \exp \left(-\frac{b^2}{2c^2} \right) H_n \left(\frac{b}{c} \right). \quad (6.64)$$

а интеграл по y , после вычисления интеграла по x , можно вычислить с помощью другого справочного интеграла [103, 294]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(cy) \exp \left(-p(y - t)^2 \right) dy = \\ = \frac{\sqrt{\pi} (p - c^2)^{n/2}}{p^{(n+1)/2}} H_n \left(ct \sqrt{\frac{p}{p - c^2}} \right). \quad (6.65)$$

Тогда на двойном фокусном расстоянии за цилиндрической линзой получим вместо (6.63) комплексную амплитуду вида:

$$E_n(\xi, \eta, z = 2f) = (-i)^{n+1} \left(\frac{z_0}{2f} \right) \left(\frac{\bar{\gamma}^n}{\gamma^{(n+1)}} \right) \exp \left(ik \frac{\xi^2 + \eta^2}{4f} \right) \times \\ \times \exp \left(-\frac{\xi^2 + \eta^2}{w^2} + \frac{ik\xi\eta}{2f} \right) H_n \left[\frac{z_0(\gamma\bar{\gamma})^{-1}}{\sqrt{2}fw} \left(\xi - i\eta \frac{z_0}{2f} \right) \right], \quad (6.66)$$

где

$$\begin{aligned}\bar{w} &= w \left(1 + \frac{4f^2}{z_0^2} \right)^{1/2}, \\ \bar{f} &= f \left(1 + \frac{4f^2}{z_0^2} \right), \\ \gamma &= \left(1 + \frac{z_0^2}{4f^2} \right)^{1/2}, \\ \bar{\gamma} &= \left(1 - \frac{z_0^2}{4f^2} \right)^{1/2}.\end{aligned}\quad (6.67)$$

Из (6.66) видно, что поле (6.60) на расстоянии $z = 2f$ по-прежнему остается пучком Эрмита–Гаусса, но с комплексным аргументом у многочлена Эрмита. Заметим, что аргумент многочлена Эрмита в (6.66) становится действительным только на горизонтальной оси при $\eta = 0$. На этой оси у многочлена Эрмита есть n изолированных невырожденных нулей интенсивности. Причем, как следует из (6.62), ОУМ такого пучка с n изолированными нулями будет либо больше n , если $z_0/(2f) > 1$, либо меньше n , если $z_0/(2f) < 1$. При условии $z_0/(2f) = 1$, так как $x^{-n}H_n(ax) \rightarrow (2a)^n$ при $x \rightarrow \infty$, вместо многочлена Эрмита в (6.66) остается только одно слагаемое с максимальным показателем степени (один изолированный n -кратно вырожденный ноль интенсивности). Тогда вместо (6.66) получим:

$$\begin{aligned}E_n(\xi, \eta, z = z_0 = 2f) &= (-i)^{n+1} 2^{-(n+1)} \exp\left(ik\frac{\xi^2 + \eta^2}{4f}\right) \times \\ &\exp\left(-\frac{\xi^2 + \eta^2}{2w^2} + \frac{ik\xi\eta}{4f}\right) \left(\frac{\xi - i\eta}{w}\right)^n.\end{aligned}\quad (6.68)$$

Из (6.68) видно, что комплексная амплитуда поля пропорциональна множителю $(\xi - i\eta)^n = r^n \exp(-in\varphi)$, где (r, φ) — полярные координаты, характерные для оптических вихрей и пучков Лагерра–Гаусса с номерами $(0, n)$. Пучок (6.68) имеет ОУМ, равный $J_z/W = -n$.

Оценим ОУМ (6.62) на один фотон для пучка (6.60) при следующих практически реализуемых параметрах: длина волны $\lambda = 532$ нм, угол поворота цилиндрической линзы $\alpha = \pi/4$, радиус перетяжки гауссова пучка $w = 2$ мм, фокусное расстояние $f = 10$ мм и порядок многочлена Эрмита $n = 100$. Нормированный ОУМ будет равен: 118104 на фотон.

6.2.4. Эксперимент. На рис. 6.2 показана экспериментальная схема для генерации и анализа эллиптических гауссовых пучков. Выходное излучение твердотельного лазера коллимировалось с помощью системы, состоящей из пинхолла PH и сферической линзы L ($f = 150$ мм). Радиус перетяжки коллимированного гауссова пучка

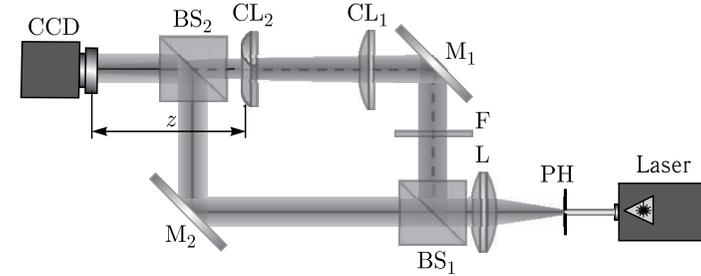


Рис. 6.2. Экспериментальная схема для генерации и анализа эллиптических гауссовых пучков: *Laser* — твердотельный лазер ($\lambda = 532$ нм), *PH* — пинхолл (размер отверстия 40 мкм), *L* — сферическая линза ($f = 150$ мм), *BS1* и *BS2* — светоделительные кубики, *F* — нейтральный светофильтр, *M1* и *M2* — зеркала, *CL1* и *CL2* — цилиндрические линзы ($f_1 = 500$ мм, $f_2 = 100$ мм), *CCD* — видеокамера

$w = 3,5$ мм. Далее расширенный лазерный пучок делился на два с помощью светоделительного кубика BS_1 для реализации схемы интерферометра Маха–Цендера. В одном из плеч интерферометра с помощью цилиндрической линзы CL_1 ($f_1 = 500$ мм) формировался эллиптический гауссов пучок в плоскости второй цилиндрической линзы CL_2 ($f_2 = 100$ мм). Расстояние между линзами CL_1 и CL_2 равнялось 200 мм. Анализируемый лазерный пучок, сфокусированный линзой CL_2 , и опорный лазерный пучок с плоским волновым фронтом сводились с помощью второго светоделительного кубика BS_2 . Нейтральный светофильтр F был использован для выравнивания интенсивностей пучков при съемке интерферограмм. Картины интерференции регистрировались с помощью видеокамеры *CCD* TourCam U3CMOS08500KPA (размер пикселя 1,67 мкм, разрешение 3328×2548 пикселей).

На рис. 6.3, *а* показано распределение интенсивности сходящегося эллиптического гауссова пучка в плоскости цилиндрической линзы с фокусным расстоянием $f = 100$ мм, повернутой на угол 45 градусов в плоскости пучка. На рис. 6.3, *б* показано сечение интенсивности того же пучка на расстоянии $z = 2f$ от цилиндрической линзы. Видно, что пучок повернулся почти на 90 градусов. На рис. 6.3, *в* показана интерферограмма эллиптического гауссова пучка на расстоянии $z = 2f$ (рис. 6.3, *б*) с почти плоской волной. На рис. 6.3 показана интенсивность пучка на расстоянии $z = 3f$. Видно, что он повернулся на 135 градусов по отношению к исходному сечению (рис. 6.3, *а*). На рис. 6.3, *д* показана интерферограмма этого сечения (рис. 6.3, *в*) с плоской волной.

На рис. 6.4 показаны две интерферограммы (рис. 6.4, *а, б*), такие же, как на рис. 6.3, *в*, но отличаются тем, что у опорного пучка была сделана задержка по фазе на π . По этим двум интерферограммам можно однозначно восстановить фазу астигматического гауссова пучка

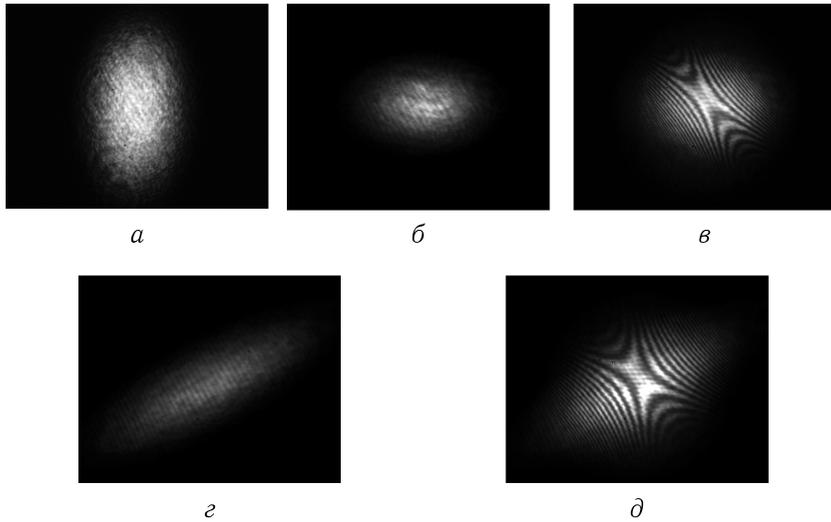


Рис. 6.3. Распределения интенсивности эллиптического гауссова пучка, зарегистрированные на расстоянии от цилиндрической линзы z , равном 0 (*а*), $2f$ (*б*), $3f$ (*в*) и интерферограммы этого пучка с плоской волной на расстояниях $2f$ (*г*) и $3f$ (*д*). Размер всех кадров 5608×4255 мкм

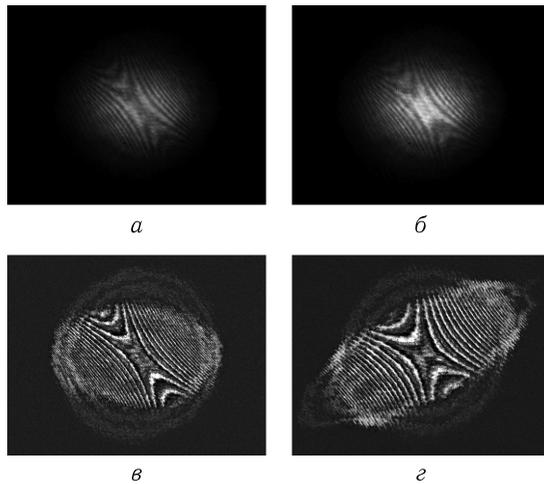


Рис. 6.4. Две интерферограммы (*а,б*), зарегистрированные в оптической схеме на рис. 6.2 на расстоянии $2f$ от второй цилиндрической линзы. Фаза опорного пучка при регистрации второй интерферограммы изменялась на π . Восстановленная по интерферограммам фаза астигматического гауссова пучка (*в*). Также восстановленная фаза (*г*) поля (рис. 6.3, *г*) на расстоянии $3f$

на расстоянии $2f$ от цилиндрической линзы (рис. 6.3, *б*). Восстановленная фаза астигматического гауссова пучка (рис. 6.3, *б*) показана на рис. 6.4, *в*. По данной фазе далее вычислялся ОУМ, он оказался равен $J_z/W \approx 63$. Это значение почти в 2 раза меньше теоретического значения.

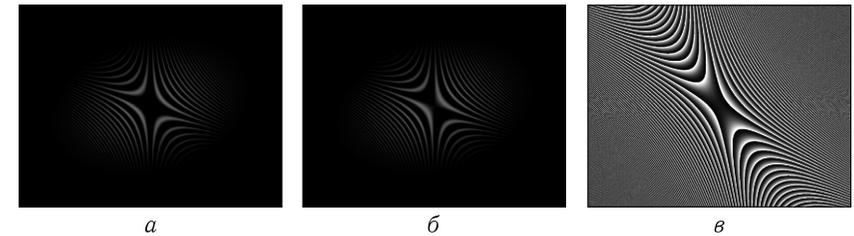


Рис. 6.5. Рассчитанное распределение интенсивности (*а,б*) двух интерферограмм, почти совпадающих с экспериментальными (рис. 6.4, *а,б*). Вторая интерферограмма также получена при изменении фазовой задержки у плоского опорного пучка на π . Восстановленная из интерферограмм (*а,б*) фаза астигматического гауссова пучка (*в*). Размер кадров 5608×4255 мкм

Далее, чтобы уточнить значение ОУМ ($J_z/W \approx 63$), полученного из экспериментальной фазы (рис. 6.4, *в*), мы предлагаем использовать новый модельно-экспериментальный метод расчета ОУМ. Он состоит в следующем. На рис. 6.5, *а,б* показаны две модельные интерферограммы, которые рассчитывались, чтобы повторить эксперимент на рис. 6.3, *б,в*. Интерферограммы на рис. 6.5, *а,б* совпадают по числу полос с экспериментальными интерферограммами на рис. 6.4, *а,б*. А на рис. 6.5, *в* показана модельная фаза, восстановленная из двух модельных интерферограмм на рис. 6.5, *а,б*. У модельной фазы (рис. 6.5, *в*), во-первых, нет шумов, которые есть у аналогичной экспериментальной фазы (рис. 6.4, *в*), а, во-вторых, она получена не только в той области, где интенсивность больше 0,1 от максимума (как получена экспериментальная фаза на рис. 6.4, *в*), но в области размером 14×14 мм (4000×4000 отсчетов). Это важно, так как в ОУМ немалый вклад вносят области пучка, в которых хотя интенсивность мала, но площадь такой области велика и градиент фазы большой (много полос на интерферограмме).

Далее по модельной восстановленной фазе (рис. 6.5, *в*) и рассчитанной на расстоянии $z = 2f$ интенсивности (на рис. 6.5 не показана) в области 14×14 мм (4000×4000 отсчетов) по общим формулам (6.43) и (6.44) рассчитывался нормированный ОУМ, который был равен

$$\frac{J_z}{W} = \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I(x, y) \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi(x, y) dx dy \right] \times$$

$$\times \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I(x, y) dx dy \right]^{-1} \approx 109,63. \quad (6.69)$$

Теоретический нормированный ОУМ астигматического гауссова пучка на рис. 6.3, рассчитанный по формуле (6.58), равен ($w = 3,5$ мм, $k = 2\pi/\lambda = 11810$ мм⁻¹, $f_1 = 500$ мм, $f = 100$ мм, $z = 200$ мм, $\alpha = \pi/4$)

$$\frac{J_z}{W} = \left(\frac{kw^2 \sin 2\alpha}{8f} \right) \left(\frac{z}{f_1} \right) \left(2 - \frac{z}{f_1} \right) \approx 116. \quad (6.70)$$

Из сравнения (6.69) и (6.70) видно, что значение нормированного ОУМ астигматического пучка на рис. 6.3, рассчитанного на основе экспериментальных данных (рис. 6.4) и с помощью модельных данных (рис. 6.5) отличается от теоретического значения всего на 6 %.

В этом разделе получены явные выражения для комплексной амплитуды эллиптического гауссова пучка, сфокусированного цилиндрической линзой. Показано, что при распространении такой пучок вращается, оставаясь гауссовым эллиптическим пучком. На двойном фокусном расстоянии распределение интенсивности пучка поворачивается на 90 градусов. Получена явная формула для нормированного ОУМ эллиптического пучка Эрмита–Гаусса с номером $(0, n)$, сфокусированного цилиндрической линзой. Теоретическая оценка показывает, что при практически реализуемых параметрах задачи, ОУМ такого пучка может достигать значения больше 100000 на фотон. Максимально достигнутое значение ОУМ равно 10010 [193]. Получено выражение для комплексной амплитуды пучка Эрмита–Гаусса, сфокусированного цилиндрической линзой. Эта амплитуда выражается через многочлен Эрмита с комплексным аргументом. Причем действительным аргумент становится только на горизонтальной декартовой оси, на которой у него расположены n невырожденных изолированных нулей интенсивности. ОУМ такого пучка может быть больше n , если длина Рэлея больше двойного фокусного расстояния цилиндрической линзы, или меньше n , если длина Рэлея меньше двойного фокусного расстояния цилиндрической линзы. Показано, что на двойном фокусном расстоянии и при условии, что длина Рэлея равна двойному фокусному расстоянию, многочлен Эрмита преобразуется в одночлен с максимальным показателем степени n , и n нулей соединяются в один n -кратно вырожденный изолированный ноль. А весь пучок Эрмита–Гаусса преобразуется в пучок Лагерра–Гаусса с номером $(0, n)$, нормированный ОУМ которого равен n . Экспериментально, с помощью двух интерферограмм, отличающихся задержкой по фазе на π в опорном пучке, была восстановлена фаза эллиптического гауссова пучка, прошедшего цилиндрическую линзу. По восстановленной фазе и измеренной интенсивности такого лазерного пучка и по общим формулам (6.43), (6.44) был рассчитан нормированный ОУМ ($J_z/W \approx 63$), который отличается

от теоретического ($J_z/W = 116$) в 2 раза. С помощью предложенного модельно-экспериментального метода (рассчитываются две интерферограммы, которые почти совпадают с двумя экспериментальными, и восстанавливается модельная фаза) получено уточненное значение ОУМ ($J_z/W \approx 109,63$), которое отличается от теоретического всего на 6 %.

6.3. Вращающийся эллиптический астигматический вихревой гауссов пучок

Известно [166, 198–201], что с помощью цилиндрической линзы можно определять топологический заряд оптического вихря. Это свойство цилиндрической линзы было замечено давно. Например, в [181] с помощью цилиндрической линзы лазерный пучок Эрмита–Гаусса с номерами $(0, n)$, который не несет орбитальный угловой момент (ОУМ), был трансформирован в лазерный пучок Лагерра–Гаусса, который имеет n -кратно вырожденный ноль интенсивности и обладает ОУМ. С помощью цилиндрической линзы можно сформировать безвихревые лазерные пучки, обладающие ОУМ [160, 161]. Такие пучки не имеют изолированных нулей интенсивности (сингулярных точек). Эти астигматические пучки описываются бесконечной суммой оптических вихрей с только четными положительными и отрицательными топологическими зарядами [161].

Известно также, что линейная комбинация со сдвигом фазы на $\pi/2$ четных и нечетных пучков Матье [119], Айнса–Гаусса [37] и Эрмита [120, 159] формирует эллиптические оптические вихри, ОУМ которых зависит от степени эллиптичности. Вклад в ОУМ у таких пучков вносит как вихревая составляющая, так и астигматическая. Причем при распространении таких эллиптических пучков вклады обеих составляющих (вихревой и астигматической) в ОУМ могут меняться [166, 167].

Измерять ОУМ оптических вихрей, в том числе дробный ОУМ [202, 203], можно не только с помощью цилиндрической линзы [166, 198–201], но и многими другими способами, например, с помощью интерферограмм [161, 202] или треугольной апертуры [204].

В данном разделе рассмотрены новые лазерные пучки, у которых объединены свойства вихревых эллиптических гауссовых пучков [37, 119, 120, 159, 167] и астигматических безвихревых лазерных пучков [160, 161]. Такое семейство лазерных пучков мы назвали астигматическими эллиптическими гауссовыми (АЭГ) оптическими вихрями. АЭГ-вихри в начальной плоскости представляют собой n -вырожденный ноль интенсивности с круговой симметрией, внедренный в центр перетяжки эллиптического гауссова пучка, радиусы перетяжки которого по декартовым осям связаны определенным соотношением, и прошедшего через цилиндрическую линзу, повернутую в начальной плоскости

вокруг оптической оси на угол 45 градусов, по отношению к декартовым осям. Такой пучок при распространении в свободном пространстве сохраняет свою структуру с точностью до масштаба и поворота. Причем дальняя зона (Фурье-преобразование) для АЭГ-пучков отстоит от начальной плоскости на двойном фокусном расстоянии цилиндрической линзы. Рассчитан относительный полный ОУМ таких пучков. Он оказался равен алгебраической сумме двух слагаемых, одно из которых равно топологическому заряду оптического вихря, а второе равно ОУМ астигматического эллиптического гауссова пучка. Эти два слагаемых могут как усиливать, так и компенсировать друг друга вплоть до нуля. В отличие от [167], величина вкладов в ОУМ вихревой и астигматической составляющих не меняется с расстоянием.

6.3.1. Амплитуда пучка на двойном фокусном расстоянии от цилиндрической линзы. Рассмотрим прохождение оптического вихря с круговой симметрией и целым топологическим зарядом n , внедренного в перетяжку эллиптического гауссова пучка, через цилиндрическую линзу, повернутую в поперечной плоскости на угол α . Комплексная амплитуда такого светового поля сразу после цилиндрической линзы имеет вид

$$E_n(x, y) = w^{-2n} (x + iy)^n \exp\left(-\frac{x^2}{w_x^2} - \frac{y^2}{w_y^2}\right) \times \exp\left(-\frac{ikx^2 \cos^2 \alpha}{2f} - \frac{iky^2 \sin^2 \alpha}{2f} - \frac{ikxy \sin 2\alpha}{2f}\right). \quad (6.71)$$

В (6.71) использованы следующие обозначения: (x, y) — декартовы координаты в поперечной плоскости при $z = 0$ (z — продольная декартова координата), w — масштабный множитель для оптического вихря, w_x и w_y — радиусы перетяжки эллиптического гауссова пучка по декартовым координатам, f — фокусное расстояние цилиндрической линзы, α — угол наклона оси линзы по отношению к вертикальной оси y , $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число света с длиной волны λ . Комплексная амплитуда пучка (6.71) на расстоянии z от начальной плоскости вычисляется с помощью преобразования Френеля:

$$E_n(u, v, z) = \frac{-ik}{2\pi z} \exp\left(\frac{iku^2}{2z} + \frac{ikv^2}{2z}\right) \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w^{-2n} (x + iy)^n \exp\left(-\frac{x^2}{w_x^2} - \frac{y^2}{w_y^2}\right) \times \exp\left(-\frac{ikx^2 \cos^2 \alpha}{2f} - \frac{iky^2 \sin^2 \alpha}{2f} - \frac{ikxy \sin 2\alpha}{2f}\right) \times$$

$$\exp\left(\frac{ikx^2}{2z} + \frac{iky^2}{2z} - \frac{ik(xu + yv)}{z}\right) dx dy. \quad (6.72)$$

Если угол поворота цилиндрической линзы равен 45 градусов ($\alpha = \pi/4$) и расстояние после линзы равно двойному фокусному расстоянию ($z = 2f$), то преобразование Френеля (6.72), с точностью до фазового множителя перед интегралами, становится преобразованием Фурье от амплитуды, описывающей оптический вихрь, внедренный в эллиптический гауссов пучок, и прошедший цилиндрическую линзу:

$$E_n(u, v, z = 2f) = \frac{-ik}{4\pi f} \exp\left(\frac{iku^2}{4f} + \frac{ikv^2}{4f}\right) \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w^{-2n} (x + iy)^n \exp\left(-\frac{x^2}{w_x^2} - \frac{y^2}{w_y^2} - \frac{ikxy}{2f}\right) \times \exp\left(-\frac{ik(xu + yv)}{2f}\right) dx dy. \quad (6.73)$$

Наша дальнейшая цель вычислить двойной интеграл в (6.73). Перепишем его в безразмерных переменных: $x/w \rightarrow x$, $y/w \rightarrow y$, $u/w \rightarrow u$, $v/w \rightarrow v$, $w/w_x = \gamma$, $w/w_y = \beta$, $z_0 = 2f$, где $z_0 = kw^2/2$ — длина Рэлея. Тогда интеграл в (6.73) примет вид:

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x + iy)^n \exp(-\gamma^2 x^2 - \beta^2 y^2 - 2ixy - 2ixu - 2iyv) dx dy. \quad (6.74)$$

Интеграл (6.74) можно вычислить:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x + iy)^n \exp[-\gamma^2 x^2 - \beta^2 y^2 - 2ixy - 2ixu - 2iyv] dx dy = \left(\frac{-i}{2}\right)^n \frac{\pi}{\sqrt{1 + \gamma^2 \beta^2}} \left(\frac{2 - \gamma^2 + \beta^2}{1 + \gamma^2 \beta^2}\right)^{n/2} \times H_n \left[\frac{(1 + \beta^2)u + i(\gamma^2 - 1)v}{\sqrt{1 + \gamma^2 \beta^2} \sqrt{2 - \gamma^2 + \beta^2}} \right] \exp\left(-\frac{\beta^2 u^2 + \gamma^2 v^2 - 2iuv}{1 + \gamma^2 \beta^2}\right). \quad (6.75)$$

В (6.75) $H_n(x)$ — многочлен Эрмита. Из (6.75) видно, что аргумент у многочлена Эрмита комплексный. В [198] было показано, что после прохождения гауссова оптического вихря с топологическим зарядом n и круговой симметрией через цилиндрическую линзу на двойном фокусном расстоянии за линзой на некоторой прямой в поперечной

плоскости многочлен Эрмита будет иметь действительный аргумент, и следовательно, на этой прямой будут находиться n нулевых линий (корней многочлена). По этим нулям интенсивности можно определить топологический заряд оптического вихря. Уравнение (6.75) расширяет метод определения топологического заряда, предложенный в [198], на оптические вихри $(x + iy)^n$, внедренные в эллиптические гауссовы пучки вида $\exp(-x^2 - \beta^2 y^2)$. Действительно, из (6.75) видно, что при $\gamma = 1$ аргумент многочлена Эрмита становится действительным $H_n(u)$, и на оптической оси u будут находиться n действительных корней (нулей) многочлена.

Найдем нормированный орбитальный угловой момент (ОУМ) пучков (6.72), (6.73), (6.74) или (6.75). Он будет у них одинаковым. Искать ОУМ будем по известным формулам [160] (с точностью до постоянных):

$$J_z = \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{E}(x, y) \left(x \frac{\partial E(x, y)}{\partial y} - y \frac{\partial E(x, y)}{\partial x} \right) dx dy, \quad (6.76)$$

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{E}(x, y) E(x, y) dx dy, \quad (6.77)$$

где J_z — проекция на оптическую ось ОУМ, W — плотность энергии (мощности) света, Im — мнимая часть числа, \bar{E} — комплексно сопряженная амплитуда к амплитуде (6.71). Подставляя (6.71) в (6.76) и (6.77), получим простое выражение для нормированного ОУМ светового поля (6.71):

$$\frac{J_z}{W} = n + i \operatorname{sgn}(w_y - w_x) \left(\frac{k w_x w_y \sin 2\alpha}{4f} \right) \frac{P_{n+1}^1(\xi)}{P_n^0(\xi)}, \quad (6.78)$$

$$\xi = \frac{1}{2} \left(\frac{w_x}{w_y} + \frac{w_y}{w_x} \right) \geq 1.$$

При условии $\alpha = \pi/4$, $z = z_0 = 2f$, $w = \gamma w_x = \beta w_y$, вместо (6.78) получим:

$$\frac{J_z}{W} = n + \frac{i \operatorname{sgn}(\gamma - \beta)}{2} \frac{P_{n+1}^1(\xi)}{\gamma \beta} \frac{P_{n+1}^1(\xi)}{P_n^0(\xi)}, \quad \xi = \frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{\gamma} + \frac{\gamma}{\beta} \right). \quad (6.79)$$

Из (6.78) и (6.79) видно, что ОУМ пучка (6.71) состоит из двух слагаемых [166, 167], первое слагаемое определяется вихревой составляющей пучка и равно топологическому заряду вихря n , а второе слагаемое определяется астигматической составляющей пучка, наведенной цилиндрической линзой, и равно $(k \sin 2\alpha) (w_y^2 - w_x^2) (8f)^{-1}$ [160, 161]. Из (6.78), (6.79) также видно, что подбором параметров эллиптичности

гауссова пучка можно скомпенсировать вихревую часть ОУМ, и общий ОУМ пучка (6.71) будет равен нулю ($J_z/W = 0$) при:

$$n = \frac{\beta^2 - \gamma^2}{2(\gamma\beta)^2}. \quad (6.80)$$

6.3.2. Семейство астигматических эллиптических гауссовых вихрей. Вернемся к выражению (6.75). При определенной связи между параметрами эллиптичности гауссова пучка ($\gamma^2 = \beta^2 + 2$) из (6.75) следует, что такие вихревые астигматические эллиптические гауссовы пучки сохраняют свою структуру в результате Фурье-преобразования:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x + iy)^n \exp[-(\beta^2 + 2)x^2 - \beta^2 y^2 - 2ixy - 2i(ux + vy)] dx dy =$$

$$= (-i)^n \frac{\pi}{(1 + \beta^2)^{n+1}} (u + iv)^n \exp\left(-\frac{\beta^2 u^2 + (\beta^2 + 2)v^2 - 2iuv}{(1 + \beta^2)^2}\right). \quad (6.81)$$

Из (6.81) видно, что в Фурье-плоскости меняется масштаб пучка, а также эллиптический гауссов пучок и фаза цилиндрической линзы поворачиваются на 90 градусов. В качестве конкретного примера рассмотрим такие параметры гауссова пучка $\gamma^2 = 3$ и $\beta^2 = 1$, тогда вместо (6.81) получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x + iy)^n \exp[-3x^2 - y^2 - 2ixy - 2i(ux + vy)] dx dy =$$

$$= (-i)^n \frac{\pi}{2^{n+1}} (u + iv)^n \exp\left(-\frac{u^2 + 3v^2 - 2iuv}{4}\right). \quad (6.82)$$

Вместо (6.82) можно записать преобразование Фурье в обычном виде. Для этого в (6.82) обозначим $\bar{u} = 2u$, $\bar{v} = 2v$, тогда получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x + iy)^n \exp[-3x^2 - y^2 - 2ixy - i(\bar{u}x + \bar{v}y)] dx dy =$$

$$= \left(-\frac{i}{4}\right)^n \frac{\pi}{2} (\bar{u} + i\bar{v})^n \exp\left(-\frac{\bar{u}^2 + 3\bar{v}^2 - 2i\bar{u}\bar{v}}{16}\right). \quad (6.83)$$

Из (6.81) и (6.83) видно, что, во-первых, при определенных параметрах эллиптичности гауссова пучка ($\gamma^2 = \beta^2 + 2$) на двойном фокусном расстоянии от цилиндрической линзы не возникает n -нулей интенсивности, по которым можно определить топологический заряд исходного вихря. Оптический вихрь восстанавливается и по-прежнему имеет в центре изолированный ноль интенсивности, n -кратно вырожденный. А, во-вторых, нами получено двухпараметрическое (n, β)

семейство астигматических эллиптических гауссовых (АЭГ) вихрей, которые обладают свойством Фурье-инвариантности (с точностью до изменения масштаба и поворота на 90 градусов). Комплексную амплитуду таких АЭГ-вихрей в начальной плоскости ($z = 0$) и в безразмерных координатах можно записать:

$$E_n(x, y, z = 0; \beta) = (x + iy)^n \exp[-(2 + \beta^2)x^2 - \beta^2y^2 - 2ixy]. \quad (6.84)$$

Нормированный ОУМ АЭГ-вихрей (6.84) дробный и следует из (6.79):

$$\frac{J_z}{W} = n + \frac{i}{\beta\sqrt{\beta^2 + 2}} \frac{P_{n+1}^1(\xi)}{P_n^0(\xi)}, \quad \xi = \frac{(1 + \beta^2)}{\beta\sqrt{\beta^2 + 2}}. \quad (6.85)$$

Исходя из (6.84) можно получить комплексную амплитуду светового поля на любом расстоянии z в размерных величинах:

$$E_n(x, y, z) = \frac{1}{z(1 + b_y)} (u + iv)^n \times \exp\left[\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2) - b_yu^2 - b_xv^2 + 2iuv\right], \quad (6.86)$$

где

$$\begin{aligned} u &= \frac{\sqrt{kf}}{z(1 + b_y)}x, \\ v &= \frac{\sqrt{kf}}{z(1 + b_y)}y, \\ b_{x,y} &= \frac{4f}{k} \left(\frac{1}{w_{x,y}^2} + \frac{ik}{4f} - \frac{ik}{2z} \right). \end{aligned} \quad (6.87)$$

Причем радиусы перетяжки эллиптического гауссова пучка не произвольные и должны удовлетворять соотношению

$$\frac{1}{w_x^2} = \frac{1}{w_y^2} + \frac{k}{2f}. \quad (6.88)$$

В безразмерных переменных условие (6.88) эквивалентно ранее приведенному ($\gamma^2 = \beta^2 + 2$). Можно показать, что световое поле, описываемое амплитудой (6.86), удовлетворяет параксиальному уравнению Гельмгольца

$$\left[2ik \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] E_n(x, y, z) = 0. \quad (6.89)$$

Из (6.86) следует выражение для комплексной амплитуды АЭГ-вихря на расстоянии $z = 2f$:

$$\begin{aligned} E_n(x, y, z = 2f) &= \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{k}{f}} \left(1 + \frac{2f}{z_{oy}} \right)^{-2} \right]^n (x + iy)^n \times \\ &\quad \times \exp\left[\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2) \right] \times \\ &\quad \times \exp\left[- \left(\frac{kx^2}{2z_{oy}} + \frac{ky^2}{2f} \left(1 + \frac{f}{z_{oy}} \right) - \frac{ikxy}{2f} \right) \left(1 + \frac{2f}{z_{oy}} \right)^{-2} \right], \end{aligned} \quad (6.90)$$

где $z_y = kw_y^2/2$ — длина Рэлея по оси y . Если наложить ограничение на параметры гауссова пучка и фокусное расстояние цилиндрической линзы ($z_{oy} = 2f$), то выражение (6.90) упростится:

$$\begin{aligned} E_n(x, y, z = z_y = 2f) &= \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{k}{16f}} \right]^n (x + iy)^n \times \\ &\quad \times \exp\left[\frac{ik}{4f}(x^2 + y^2) - \left(\frac{kx^2}{16f} + \frac{3ky^2}{16f} - \frac{2ikxy}{16f} \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.91)$$

Выражение (6.91) совпадает с правой частью (6.83) в безразмерных переменных с точностью до постоянной и без учета квадратичного фазового множителя $\exp[ik(x^2 + y^2)/(4f)]$.

Если устремить в (6.86) z к нулю, то в пределе получим начальную амплитуду, совпадающую в безразмерных переменных с (6.84), где $\beta^2 = 2f/z_y = 4f/(kw_y^2)$.

6.3.3. Результаты моделирования. На рис. 6.6 показаны рассчитанные по формуле (6.86) распределения интенсивности и фазы для АЭГ-вихрей при разных топологических зарядах и на разных расстояниях z от начальной плоскости. Параметры расчета: начальные радиусы перетяжки эллиптического гауссова пучка $w_x = 123$ мкм и $w_y = 3w_x = 369$ мкм, длина волны 532 нм. Из рис. 6.6 видно, что интенсивность АЭГ-вихрей (при $n > 0$) представляет собой по внешнему виду два квазиэллиптических гауссовых пучка, большие оси которых лежат на одной прямой, и которые разделены расстоянием L , зависящим как корень квадратный от величины топологического заряда n :

$$L = w_y(z)\sqrt{n}, \quad (6.92)$$

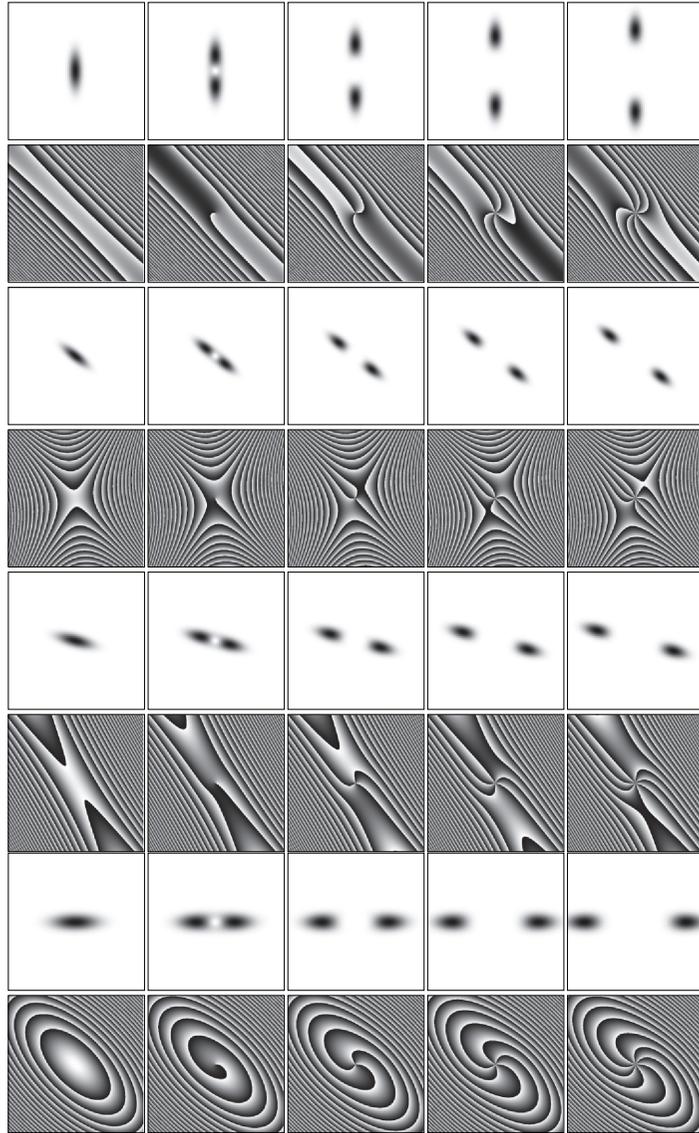


Рис. 6.6. Распределения интенсивности (строки 1,3,5,7) и фазы (строки 2, 4, 6, 8), рассчитанные по формуле (6.86) для АЭГ-вихрей с параметром эллиптичности 1 : 3 и топологическими зарядами $n = 0$ (первый столбец), 1 (второй столбец), 3 (третий столбец), 5 (четвертый столбец), 7 (пятый столбец) на различных расстояниях от начальной плоскости: $z = 0$ (строки 1, 2), $z = f = 100$ мм (строки 3, 4), $z = 150$ мм (строки 5,6) и $z = 2f = 200$ мм (строки 7, 8). Размер кадров 2300×2300 мкм

где радиус перетяжки гауссова пучка по одной из координат при любом z имеет вид:

$$w_y(z) = (kfw_y)^{-1} [z^2(z_y + 2f)^2 + z_y^2(z - 2f)^2]^{1/2}. \quad (6.93)$$

Из (6.93) видно, что зависимость от расстояния z радиуса перетяжки эллиптического гауссова пучка отличается от такой зависимости для обычного гауссова пучка.

При распространении в свободном пространстве АЭГ-вихри сохраняют свою структуру, меняются масштабно (расстояние между максимумами двух светлых пятен увеличивается) и вращаются вокруг оптической оси. При этом на самой оптической оси остается изолированный n -кратно вырожденный ноль интенсивности, фаза при обходе вокруг которого меняется на $2\pi n$. Но и при $n = 0$ АЭГ-вихрь, хотя и не имеет вихревой составляющей (нуля интенсивности в центре), тем не менее обладает ОУМ (остается азимутальная составляющая). Из (6.85) и соотношения начальных радиусов перетяжки $w_y = 3w_x$ ($\beta^2 = 1/4$) следует, что ОУМ пучков на рис. 6.6 равен:

$$\frac{J_z}{W} = n + \frac{4i P_{n+1}^1(5/3)}{3 P_n^0(5/3)}. \quad (6.94)$$

Из рис. 6.6 также видно, что АЭГ-вихри при любом n при распространении вращаются не зависимо от величины n против часовой стрелки. Можно показать, что угол поворота θ АЭГ-вихря как целого зависит от расстояния z следующим образом:

$$\operatorname{tg} \theta = \left(\frac{2f}{z_y} + 1 \right) \left(\frac{2f}{z} - 1 \right)^{-1}. \quad (6.95)$$

Из (6.95) видно, что при $z = 0$ угол поворота равен $\theta = 0$ (пучок вытянут вдоль вертикальной оси, так как $w_y = 3w_x$), при $z = 2f$ угол поворота равен $\theta = \pi/2$ (пучок вытянут вдоль горизонтальной оси), а при $z = f$ угол немного больше $\pi/4$ (так как $z_y \gg 2f$ при выбранных параметрах) и равен:

$$\theta = \operatorname{arctg} \left(\frac{2f}{z_y} + 1 \right). \quad (6.96)$$

Эти выводы подтверждаются картинками интенсивности пучка на рис. 6.6.

6.3.4. Эксперимент. Для подтверждения теории и расчетов было проведено экспериментальное наблюдение распространения АЭГ-вихрей. На рис. 6.7 показана оптическая схема установки, использованной в эксперименте. Эллиптический гауссов лазерный пучок ($\lambda = 532$ нм) с параметром эллиптичности 1 : 3 направлялся на дисплей пространственного модулятора света SLM (HOLOEYE, PLUTO-VIS). Модулятор света был использован для реализации фазовой маски в виде

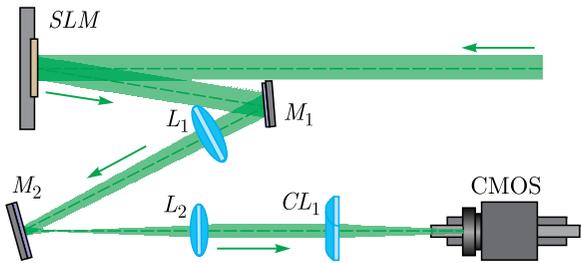


Рис. 6.7. Оптическая схема для исследования фокусировки эллиптических оптических вихрей с помощью цилиндрической линзы: *SLM* — пространственный модулятор света HOLOEYE PLUTO-VIS, *M*₁ и *M*₂ — зеркала, *L*₁ и *L*₂ — сферические линзы ($f_1 = 350$ мм, $f_2 = 150$ мм), *CL*₁ — цилиндрическая линза ($f_3 = 100$ мм), CMOS — видеокамера TouPCam U3CMOS08500KPA

$\tau(r, \varphi) = \exp(i[n\varphi + \alpha x])$, (r, φ) — полярные координаты, $r^2 = x^2 + y^2$, α — пространственная частота несущей, n — топологический заряд), генерирующей внеосевой заданный вихревой пучок. Отраженный от модулятора и промодулированный по фазе эллиптический пучок с помощью комбинации линз *L*₁, *L*₂ ($f_1 = 350$ мм, $f_2 = 150$ мм) и зеркал *M*₁, *M*₂ направлялся на цилиндрическую линзу *CL*₁ ($f_3 = 100$ мм), наклоненную под углом 45 градусов в плоскости перпендикулярной оси распространения пучка. Система линз строила изображение плоскости, сопряженной с плоскостью дисплея модулятора, в плоскости цилиндрической линзы $z = 0$. CMOS-видеокамера, расположенная на оптическом рельсе, позволяла снимать формируемые распределения интенсивности пучка на различном расстоянии z от плоскости цилиндрической линзы. Изображения, полученные на расстояниях $z = 0, 100, 150$ и 200 мм, представлены на рис. 6.8.

Из сравнения рис. 6.6 и 6.8 видно хорошее согласие теории и эксперимента.

На рис. 6.9 показаны две интерферограммы, полученные для АЭГ-вихрей, показанных на рис. 6.8 при $z = 2f$ и $n = 1, 3$. Из рис. 6.9 видно, что действительно, в центре пучка сохраняется оптический вихрь с топологическим зарядом $n = 1$ (рис. 6.9, а) и $n = 3$ (рис. 6.9, б).

Интерферограммы для $n = 5, 7$ получились с низким контрастом полос, так как в промежутке между двумя локальными максимумами (рис. 6.8) почти нулевая интенсивность света.

В этом разделе найдено новое модовое решение параксиального уравнения Гельмгольца. Это решение описывает семейство неортогональных лазерных мод — астигматических эллиптических гауссовых оптических вихрей. Такие пучки в начальной плоскости представляют собой изолированный n -кратно вырожденный ноль интенсивности, внедренный в центр перетяжки эллиптического гауссова пучка, главные оси эллипса которого расположены вдоль декартовых осей, про-

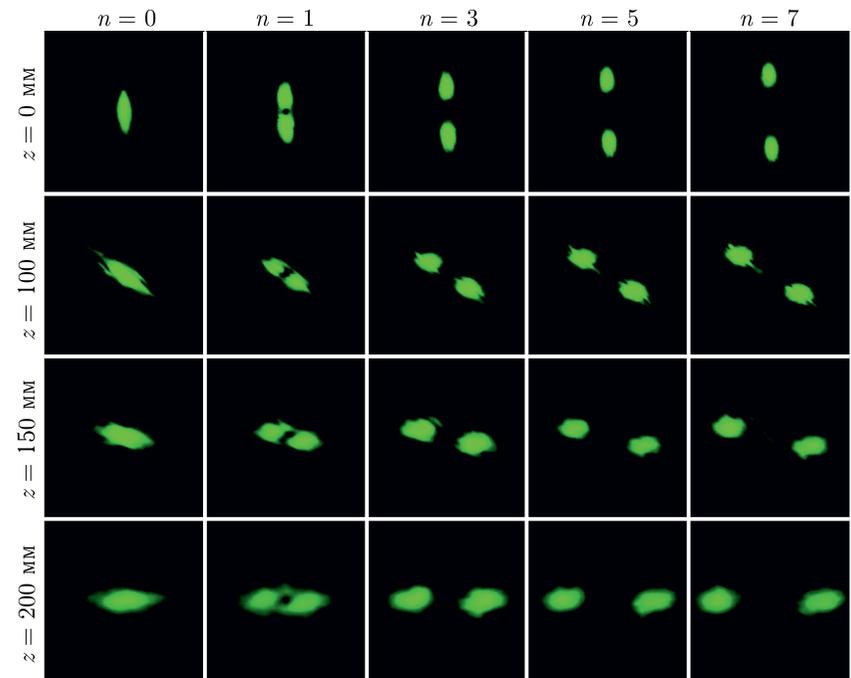


Рис. 6.8. Распределения интенсивности, полученные для случая фокусировки эллиптических вихревых пучков с параметром эллиптичности 1:3 и топологическим зарядом $n = 0, 1, 3, 5$ и 7 на различных расстояниях от плоскости цилиндрической линзы: $z = 0, 100$ (фокусное расстояние), 150 и 200 мм (двойное фокусное расстояние). Размер кадров 2300×2300 мкм

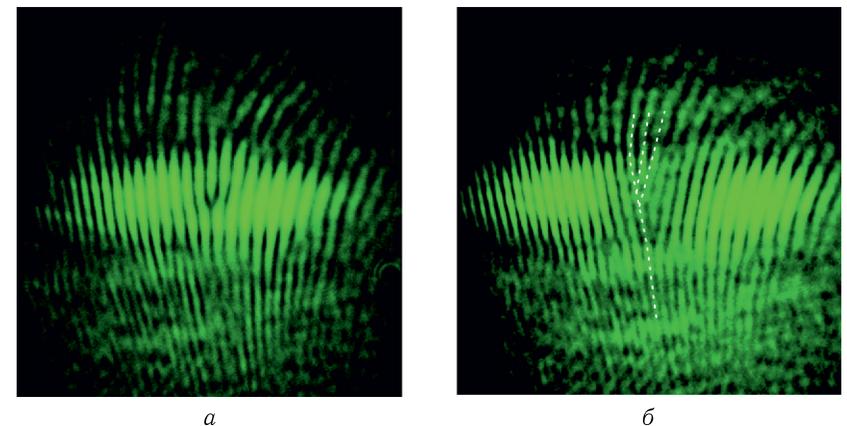


Рис. 6.9. Интерферограммы АЭГ-вихрей, полученных на расстоянии $z = 2f$ (рис. 6.8 строка 4) при $n = 1$ (а) и $n = 3$ (б)

шедшего цилиндрическую линзу, ось которой повернута в начальной плоскости вокруг оптической оси на 45 градусов по отношению к декартовым осям. Радиусы перетяжки гауссова пучка не произвольные, а связаны определенным соотношением. Найден нормированный на мощность пучка полный орбитальный угловой момент. Он равен сумме двух слагаемых, одно из которых топологический заряд n оптического вихря, а второе слагаемое описывает вклад безвихревого астигматического эллиптического гауссова пучка [161]. Орбитальный момент таких пучков может быть дробным, целым или нулевым. Найденные модовые пучки при распространении сохраняют свою структуру, меняются только масштабно и вращаются вокруг оптической оси. На двойном фокусном расстоянии от цилиндрической линзы пучок поворачивается на 90 градусов. Распределение интенсивности таких пучков имеет характерный вид: два почти эллиптических световых пятна, большие оси которых лежат на одной прямой, и расстояние между максимумами этих световых пятен зависит как корень квадратный от величины топологического заряда и увеличивается при распространении пучка в свободном пространстве. Заметим, что в таких пучках из-за согласованности радиусов перетяжки эллиптического гауссова пучка и угла наклона цилиндрической линзы, цилиндрическая линза не «снимает» вырождение центрального нуля интенсивности и не «разваливает» его на n разделенных в пространстве нулей интенсивности, как это принято считать [198].

Заключение

В заключении хотелось бы подчеркнуть, что в настоящее время многие лазерные пучки, в том числе вращающиеся, легко сформировать с помощью модуляторов света. Жидко-кристаллические пространственные модуляторы света (ПМС) [205] используются для формирования заданной геометрии волнового фронта. ПМС используют для формирования лазерных пучков [206], в адаптивной оптике [207–209], для обработки изображений [210], оптического захвата микрообъектов [211–213], в динамической голографии и проекции изображений [214, 215]. Наряду с широким спектром приложений, ПМС обладают серьезными недостатками, касающимися их оптического качества, стабильности, конечного диапазона фазовой модуляции и относительно низкой скорости [205]. К счастью, некоторые из них можно исправить в достаточной степени для многих приложений [216–219]. Имея хорошо скорректированный ПМС, можно генерировать пучки, принадлежащие к известным семействам, таким как гауссовы вихревые пучки [220, 221], пучки Бесселя [222], пучки Эйри [223]. Также возможна генерация векторных пучков [224, 225]. ПМС может изменять стандартные формы данного пучка для повышения его полезности. Улучшенные вихревые пучки — так называемые идеальные вихревые пучки [226, 227] — хороший пример. Также есть статьи, посвященные более сложным примерам лазерных пучков, которые могут быть получены с помощью ПМС [228–230]. Эти комбинации различных вихревых пучков обычно создаются просто наложением двух разделенных пучков. Несколько статей относятся к этому методу [123, 231–236]. Некоторые из них требуют очень стабильных условий, т. е. оба пучка должны полностью перекрываться при распространении вдоль оси. Хорошим примером является теоретическая работа [237], в которой угловой момент пучка, несущего оптический вихрь, анализируется по аналогии с механикой твердого тела. В этой работе вращающийся вихревой пучок был получен интерференцией гауссова пучка и моды Лагерра–Гаусса. Эксперимент, который бы мог воспроизвести теоретические результаты требует точной и стабильной юстировки пучка.

В данной книге вращающиеся лазерные пучки формировались как с помощью специально изготовленных дифракционных оптических элементов (ДОЭ) [238], так и с помощью ПМС. Заметим, что в современных условиях на смену ДОЭ и ПМС приходят компоненты фотоники с метаповерхностью, с помощью которых также можно формировать вращающиеся лазерные пучки на микроуровне [239], [240].

Список литературы

1. *Backlund M.P., Lew M.D., Backer A.S., Sahl S.J., Grover G., Agrawal A., Piestun R., Moerner W.E.* The double-helix point spread function enables precise and accurate measurement of 3D single-molecule localization and orientation // *Proc. of SPIE*. 2013. V. 8590. P. 85900.
2. *Lavery M.P.J., Peuntinger C., Gunthner K., Banzer P., Elser D., Boyd R.W., Padgett M.J., Marquardt C., Leuchs G.* Free-space propagation of high-dimensional structured optical fields in an urban environment // *Sci. Adv.* 2017. V. 3. P. e1700552.
3. *Morgan K.S., Miller J.K., Cochennour B.M., Li W., Li Y., Watkins R.J., Johnson E.G.* Free space propagation of concentric vortices through underwater turbid environments *J. Opt.* 2016. V. 18. P. 104004.
4. *Yu S., Pung F., Liu H., Li X., Yang J., Wang T.* Compositing orbital angular momentum beams in Bi₄Ge₃O₁₂ crystal for magnetic field sensing // *Appl. Phys. Lett.* 2017. V. 111. P. 091107.
5. *Abramochkin E., Volostnikov V.* Spiral-type beams // *Opt. Commun.* 1993. V. 102. P. 336–350.
6. *Schechner Y.Y., Piestun R., Shamir J.* Wave propagation with rotating intensity distributions // *Phys. Rev. E*. 1996. V. 54, № 1. P. R50–R53.
7. *Paakkonen P., Lautanen J., Honkanen M., Kuittinen M., Turunen J., Khonina S.N., Kotlyar V.V., Soifer V.A., Friberg A.T.* Rotating optical fields: experimental demonstration with diffractive optics // *J. Mod. Opt.* 1998. V. 45. P. 2355–2369.
8. *Greengard A., Schechner Y.Y., Piestun R.* Depth from diffracted rotation // *Opt. Lett.* 2006. V. 31. P. 181–183.
9. *Pavani S.R.P., Piestun R.* High-efficiency rotating point spread functions // *Opt. Express*. 2008. V. 16. P. 3484–3489.
10. *Rob R., Litvin I.A., Forbes A.* Generation and propagation dynamics of obstructed and unobstructed rotating orbital angular momentum-carrying Helicon beams // *J. Opt.* 2012. V. 14. P. 035702.
11. *Голуб М.А., Карпеев С.В., Прохоров А.М., Сисакян И.Н., Сойфер В.А.* Фокусировка когерентного излучения в заданную область пространства с помощью синтезированных на ЭВМ голограмм // *Письма в ЖТФ*. 1981. Т. 7, № 10. С. 618–623.
12. *Голуб М.А., Дегтярева В.П., Климов А.Н., Попов В.В., Прохоров А.М., Сисакян И.Н., Сойфер В.А.* Машинный синтез фокусирующих элементов для СО₂-лазера // *Письма в ЖТФ*. 1982. Т. 8, № 13. С. 449–451.
13. *Голуб М.А., Прохоров А.М., Сисакян И.Н., Сойфер В.А.* Синтез пространственных фильтров для исследования поперечного модового состава когерентного излучения // *Квантовая электроника*. 1982. Т. 9, № 9. С. 1866–1868.
14. *Голуб М.А., Карпеев С.В., Кривошлыков С.Г., Прохоров А.М., Сисакян И.Н., Сойфер В.А.* Экспериментальное исследование распределения мощности по поперечным модам в волоконном световоде с помощью пространственных фильтров // *Квантовая электроника*. 1984. Т. 11, № 9. С. 1869–1871.
15. *Березный А.Е., Прохоров А.М., Сисакян И.Н., Сойфер В.А.* Бессель-оптика // *Доклады АН СССР*. 1984. Т. 274, № 4. С. 802–805.
16. *Kotlyar V.V., Nikolsky I.V., Soifer V.A.* An algorithm for calculating multichannel formers of Gaussian modes // *Optik*. 1994. V. 98, № 1. P. 26–30.
17. *Kotlyar V.V., Khonina S.N., Soifer V.A.* Algorithm for the generation of non-diffracting Bessel modes // *J. Mod. Opt.* 1995. V. 42, № 6. P. 1231–1239.
18. *Kotlyar V.V., Soifer V.A., Khonina S.N.* An algorithm for the generation of laser beams with longitudinal periodicity: Rotating images // *J. Mod. Opt.* 1997. V. 44, № 7. P. 1409–1416.
19. *Kotlyar V.V., Soifer V.A., Khonina S.N.* Rotation of multimodal Gauss-Laguerre light beams in free space and in a fiber // *Optics and Lasers in Engineering*. 1998. V. 29, № 4-5, P. 343–350.
20. *Kotlyar V.V., Khonina S.N., Melekhin A.S., Soifer V.A.* Fractional encoding method for spatial filters computation // *Asian Journal of Physics*. 1999. V. 8, № 3. P. 273–286.
21. *Paterson L., MacDonald M.P., Arlt J., Sibbett W., Bryant P.E., Dholakia K.* Controlled Rotation of Optically Trapped Microscopic Particles // *Science*. 2001. V. 292, Iss. 5518. P. 912–914.
22. *MacDonald M.P., Volke-Sepulveda K., Paterson L., Arlt J., Sibbett W., Dholakia K.* Revolving interference patterns for the rotation of optically trapped particles // *Optics Communications*. 2002. V. 201, Iss. 1–3. P. 21–28.
23. *Garcia-Chavez V., MacGloin D., Melville H., Sibbett W., Dholakia K.* Simultaneous micromanipulation in multiple planes using a self-reconstructing light beam // *Nature*. 2002. V. 419. P. 145–147.
24. *Методы компьютерной оптики / Под ред. В.А. Сойфера.* Учебное пособие. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2000, 688 с.
25. *Khonina S.N., Kotlyar V.V., Soifer V.A.* Calculation of the focusators into a longitudinal linesegment and study of a focal area // *J. Modern Optics*. 1993. V. 40, № 5. P. 761–769.

26. *Turunen J., Vasara A., Friberg A.T.* Holographic generation of diffraction-free beams // *Applied Optics*. 1988. V. 27, № 19. P. 3959–3962.
27. *Adams M.J.* An introduction to optical waveguides. J.Wiley & Sons, Chichester, 1981.
28. *Soifer V.A., Golub M.A.* Laser beam mode selection by computer-generated holograms. CRC Press, Boca Raton, 1994.
29. *Basistiy I.V., Bazhenov V.Yu., Soskin M.S., Vasnetsov M.V.* Optics of light beams with screw dislocations // *Opt. Comm.* 1993. V. 103, Iss. 5–6. P. 422–428.
30. *Abramochkin E., Losevsky N., Volostnikov V.* Generation of spiral-type laser beams // *Opt. Comm.* 1997. V. 141. P. 59–64.
31. *Kotlyar V.V., Khonina S.N., Soifer V.A.* Light field decomposition in angular harmonics by means of diffractive optics // *J. Mod. Opt.* 1998. V. 45, Iss. 7. P. 1495–1506.
32. *Trapani P.D., Berzanskis A., Minardi S., Sapone S., Chinaglia W.* Observation of Optical Vortices and J_0 Bessel-Like Beams in Quantum-Noise Parametric Amplification // *Phys. Rev. Lett.* 1998. V. 81, P. 5133.
33. *Siegman A.E.* Lasers. University Science, Mill Valley, CA, 1986.
34. *Miller Jr., W.* Symmetry and separation of variables. Addison-Wesley Pub. Comp., 1977.
35. *Durnin J., Miceli J.J., Eberly J.H.* Diffraction-free beams // *Phys. Rev. Lett.* 1987. V. 58. P. 1499–1501.
36. *Bandres M.A., Gutierrez-Vega J.C.* Ince-Gaussian beams // *Opt. Lett.* 2004. V. 29, № 2. P. 144–146.
37. *Bandres M.A., Gutierrez-Vega J.* Ince-Gaussian modes of the paraxial wave equation and stable resonators // *J. Opt. Soc. Am. A.* 2004. V. 21, № 5. P. 873–880.
38. *Bandres M.A., Gutierrez-Vega J.C.* Elegant Ince-Gaussian beams // *Opt. Lett.* 2004. V. 29, № 15. P. 1724–1726.
39. *Bandres M.A., Gutierrez-Vega J.C.* Higher-order complex source for elegant Laguerre-Gaussian waves // *Opt. Lett.* 2004. V. 29, № 19. P. 2213–2215.
40. *Schwarz U.T., Bandres M.A., Gutierrez-Vega J.C.* Observation of Ince-Gaussian modes in stable resonators // *Opt. Lett.* 2004. V. 29, № 16. P. 1870–1872.
41. *Abramochkin E.G., Volostnikov V.G.* Generalized Gaussian beams // *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* 2004. V. 6. P. 5157–5161.
42. *Khonina S.N., Kotlyar V.V., Shinkaryev M.V., Soifer V.A., Uspleniev G.V.* The phase rotor filter // *Journal of Modern Optics*. 1992. V. 39, № 5. P. 1147–1154.

43. *Beijersbergen M.W., Coerwinkel R.P.C., Kristiansen M., Woerdman J.P.* Helical-wave front laser beams produced with a spiral phase plate // *Opt. Commun.* 1994. V. 112, P. 321–327.
44. *Oemrawsingh S.S.R., Van Houwelingen J.A.M., Eliel E.R., Woerdman J.P., Versteegen E.J.K., Kloosterboer J.G., Hooft G.W.* Production and characterization of spiral phase plates for optical wavelengths // *Appl. Opt.* 2004. V. 43, № 3. P. 688–694.
45. *Soskin M.S., Gorshkov U.N., Vasnetsov M.V.* Topological charge and angular momentum of light beams carrying optical vortices // *Phys. Rev. A.* 1997. V. 56, № 5. P. 4064–4075.
46. *Kotlyar V.V., Almazov A.A., Khonina S.N., Soifer V.A., Elfstrom H., Turunen J.* Generation of phase singularity through diffracting a plane or Gaussian beam by a spiral phase plate // *J. Opt. Soc. Am. A.* 2005. V. 22, № 5. P. 849–861.
47. *Allen L., Beijersbergen M.W., Spreeuw R.J.C., Woerdman J.P.* Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian modes // *Phys. Rev. A.* 1992. V. 45, № 11. P. 8185–8189.
48. *Khonina S.N., Kotlyar V.V., Soifer V.A., Paakkonen P., Simonen J., Turunen J.* An analysis of the angular momentum of a light field in terms of angular harmonics // *J. Mod. Opt.* 2001. V. 48, № 10. P. 1543–1557.
49. *Khonina S.N., Kotlyar V.V., Soifer V.A., Paakkonen P., Turunen J.* Measuring the light field orbital angular momentum using DOE // *Optical Memory and Neural Networks*. 2001. V. 10, № 4. P. 241–255.
50. *Wright E.M., Arlt J., Dholakia K.* Toroidal optical dipole traps for atomic Bose-Einstein condensates using Laguerre-Gaussian beams // *Physical Review A.* 2000. V. 63. P. 013608.
51. *Bandres M.A., Gutierrez-Vega J.C., Chavez-Cedra S.* Parabolic nondiffracting optical wave fields // *Opt. Lett.* 2004. V. 29, № 1. P. 44–46.
52. *Gutierrez-Vega J.C., Bandres M.A.* Helmholtz-Gauss waves // *J. Opt. Soc. Am. A.* 2005. V. 22, № 2. P. 289–298.
53. *Bandres M.A., Gutierrez-Vega J.C., Chavez-Cedra S.* Vector Helmholtz-Gauss and vector Laplace-Gauss beams // *Opt. Lett.* 2005. V. 30, № 16. P. 2155–2157.
54. *Bentley J.B., Devis J.A., Bandres M.A., Gutierrez-Vega J.C.* Generation of helical Ince-Gaussian beams with a liquidcrystal display // *Opt. Lett.* 2006. V. 31, № 5. P. 649–651.
55. *Handbook of mathematical functions / ed by M. Abramovitz, I.A. Stegun.* NBS, Appl. Math. Ser. 55, 1964.
56. *Durnin J.* Exact solutions for nondiffracting beams. I. The scalar theory // *J. Opt. Soc. Am. A.* 1987. V. 4, № 4. P. 651–654.

57. *Durnin J., Miceli J.J., Eberby J.H.* Comparison of Bessel and Gaussian beams // *Opt. Lett.* 1988. V. 13. P. 79–80.
58. *Gori F., Guattari G., Padovani C.* Bessel-Gauss beams // *Opt. Commun.* 1987. V. 64, № 6. P. 491–495.
59. *Валиев А.Б., Кривошлыков С.Г.* Модальные свойства бесселевых пучков // *Квантовая электроника.* 1989. Т. 16. С. 1047–1049.
60. *Vasara A., Turunen J., Friberg A.T.* Realization of general nondiffracting beams with computer-generated holograms // *J. Opt. Soc. Am. A.* 1989. V. 6. P. 1748–1754.
61. *Унгер Х.Г.* Планарные и волоконные оптические волноводы. М.: Мир, 1980
62. *Бельский А.М.* Самовоспроизводящиеся пучки и их связь с недифрагирующими пучками // *Оптика и спектроскопия.* 1992. Т. 73, № 5. С. 947–951.
63. *Montgomery W.D.* Self-imaging objects of infinite aperture // *J. Opt. Soc. Am.* 1967. V. 57. P. 772–778.
64. *Иоселуани Р.Е.* Дифракция Френеля на двумерных периодических структурах // *Оптика и спектроскопия.* 1983. Т. 55, № 5. С. 904–909.
65. *Colantti C., Ruiz B., Sicre E.E., Gavavaglia M.* Walsh functions: analysis of their properties under Fresnel diffraction // *J. Mod. Opt.* 1987. V. 34, № 10. P. 1383–1391.
66. *Jansson T.* Self-imaging effect in physical radiometry // *J. Opt. Soc. Am.* 1983. V. 73, № 3. P. 402–405.
67. *Lohmann A.W., Mendlovic D.* An optical self-transform with odd cycles // *Opt. Commun.* 1992. V. 93, № 1. P. 25–26.
68. *Da X.* Multiple-image formation by Fresnel-Dirac sampling // *Appl. Opt.* 1995. V. 34, № 2. P. 299–302.
69. *Коряковский А.С., Марченко В.М.* Исследование формы зеркальных поверхностей методом Тальбот-интерферометрии // *Препринт ФИАН.* № 10. 1983.
70. *Nakano Y., Murata K.* Measurement of phase objects using the Talbot effect and moire techniques // *Appl. Opt.* 1984. V. 23. P. 2296–2299.
71. *Bhattacharya J.C., Aggarwal A.K.* Measurement of the focal length of a collimating lens using the Talbot effect and the moire technique // *Appl. Opt.* 1991. V. 30, № 31. P. 4479–4480.
72. *Lohmann A.W., Thomas J.A.* Making an array illuminator based on the Talbot effect // *Appl. Opt.* 1990. V. 29. P. 4337–4340.
73. *Torroba R.D.* Self-Fourier transforming phenomenon // *Optik.* 1988. V. 80, № 3. P. 113–114.

74. *Lohmann A.W., Mendlovic D.* Self-Fourier objects and other self-transform objects // *J. Opt. Soc. Am.* 1992. V. 9. P. 2009–2012.
75. *Golub M.A., Doskolovich L.L., Kazanskiy N.L., Kharitonov S.I., Soifer V.A.* Computer-generated diffractive multi-focal lens // *J. Mod. Opt.* 1992. V. 39, № 6. P. 1245–1251.
76. *Khonina S.N., Kotlyar V.V., Soifer V.A.* Diffraction computation of a focusator into a longitudinal segment and multifocal lens // *Proc. SPIE.* 1993. V. 1780. P. 263–272.
77. *Soifer V.A., Doskolovich L.L., Kazanskiy N.L.* Multifocal diffractive elements // *Opt. Eng.* 1994. V. 33, № 11. P. 3611–3615.
78. *Kotlyar V.V., Khonina S.N., Soifer V.A.* Calculation of phase formers of non-diffracting images and a set of concentric rings // *Optik.* 1996. V. 102, № 2. P. 45–50.
79. *Belsky A.M.* Self-reproducing beams and their relation to nondiffracting beams // *Optics and Spectroscopy.* 1992. V. 73, № 5. P. 568–573.
80. *Piestun R., Spector B., Shamir J.* Unconventional light distributions in three-dimensional domains // *J. Mod. Opt.* 1996. V. 43, № 7. P. 1495–1507.
81. *Kotlyar V.V., Khonina S.N., Soifer V.A.* Iterative calculation of diffractive optical elements focusing into a three-dimensional domain and onto the surface of the body of rotation // *J. Mod. Opt.* 1996. V. 43, № 7. P. 1509–1524.
82. *Korn G.A., Korn T.M.* Mathematical handbook for scientists and engineers. McGrawHill, New York, 1961.
83. *Кузнецов Д.С.* Специальные функции. М.: Высшая школа, 1962.
84. *Fienup J.R.* Phase retrieval algorithms: a comparison // *Appl. Opt.* 1982. V. 21, № 15. P. 2758–2769.
85. *Bekshaev A.Ya., Soskin M.S., Vasnetsov M.V.* Centrifugal transformation of the transverse structure of freely propagating paraxial light beams // *Opt. Lett.* 2006. V. 31, № 6. P. 694–696.
86. *Lopez-Aguayo S., Desyatnikov A.S., Kivshar Y.S., Skupin S., Krolikowski W., Bang O.* Stable rotating dipole solitons in nonlocal optical media // *Opt. Lett.* 2006. V. 31, № 8. P. 1100–1102.
87. *Fatemi F.K., Bashkansky M.* Generation of hollow beams by using a binary spatial light modulator // *Opt. Lett.* 2006. V. 31, № 7. P. 864–866.
88. *Chakraborty R., Ghosh A.* Generation of an elliptic Bessel beam // *Opt. Lett.* 2006. V. 31, № 1. P. 38–40.
89. *Dennis M.R.* Rows of optical vortices from elliptically perturbing a high-order beam // *Optics Letters.* 2006. V. 31, № 9. P. 1325–1327.

90. *Kotlyar V.V., Soifer V.A., Khonina S.N.* Вращение световых многомодовых пучков Гаусса–Лагерра в свободном пространстве // Письма в ЖТФ. 1997. Т. 23, № 17. С. 1–6.
91. *He H., Friese M.E.J., Heckenberg W.R., Rubinsztein-Dunlop H.* Direct Observation of Transfer of Angular Momentum to Absorptive Particles from a Laser Beam with a Phase Singularity // Phys. Rev. Lett. 1995. V. 75, № 5. P. 826–829.
92. *Cai Y., Lin Q.* Decentered elliptical Gaussian beam // Appl. Opt. 2002. V. 41, № 21. P. 4336–4340.
93. *Cai Y., Lin Q.* Decentered elliptical Hermite-Gaussian beam // J. Opt. Soc. Am. A. 2003. V. 20, № 6. P. 1111–1119.
94. *Cai Y., Lin Q.* A partially coherent elliptical flattened Gaussian beam and its propagation // J. Opt. A: Pure and Appl. Opt. 2004. V. 6. P. 1061–1066.
95. *Mitreska Z.* Diffraction of elliptical Gaussian light beams on rectangular profile grating of transmittance // Pure Appl. Opt. 1994. V. 3. P. 995–1004.
96. *Seshadri S.* Basic elliptical Gaussian wave and beam in a uniaxial crystal // J. Opt. Soc. Am. A. 2003. V. 20, № 9. P. 1818–1826.
97. *Steinbach A., Ranner M., Cruz F.C., Bergquist J.C.* CW second harmonic generation with elliptical Gaussian beam // Opt. Commun. 1996. V. 123. P. 207–214.
98. *Cai Y., Lin Q.* Light beams with elliptical flat-topped profiles // J. Opt. A: Pure and Appl. Opt. 2004. V. 6. P. 390–395.
99. *Cai Y., Lin Q.* Hollow elliptical Gaussian beam and its propagation through aligned and misaligned paraxial optical systems // J. Opt. Soc. Am. A. 2004. V. 21, № 6. P. 1058–1065.
100. *Bin Z., Zhu L.* Diffraction property of an axicon in oblique illumination // Appl. Opt. 1998. V. 37, № 13. P. 2563–2568.
101. *Thaning A., Jaroszewicz Z., Friberg A.T.* Diffractive axicons in oblique illumination: analysis and experiments and comparison with elliptical axicons // Appl. Opt. 2003. V. 42, № 1. P. 9.
102. *Khonina S.N., Kotlyar V.V., Soifer V.A., Jefimovs K., Paakkonen P., Turunen J.* Astigmatic Bessel laser beams // Journal of Modern optics. 2004. V. 51, № 5. P. 677–686.
103. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. — М.: Наука, 1983. 750 с.
104. *Sacks Z., Rozas D., Swartzlander Jr. G.* Holographic formation of optical-vortex filaments // J. Opt. Soc. Am. B. 1998. V. 15. P. 2226–2234.
105. *Nye J.F., Berry M.V.* Dislocations in wave trains // Proc. the Royal Society of London, Series A. 1974. V. 336. P. 1605.

106. *Kotlyar V.V., Khonina S.N., Kovalev A.A., Soifer V.A., Elfstrom H., Turunen J.* Diffraction of a plane, finite-radius wave by a spiral phase plate // Opt. Lett. 2006. V. 31, № 11. P. 1597–1599.
107. *Garcia-Gracia H., Gutiérrez-Vega J.* Diffraction of plane waves by finite-radius spiral phase plates of integer and fractional topological charge // J. Opt. Soc. Am. A. 2009. V. 26. P. 794–803.
108. *Schulze C., Roux F.S., Dudley A., Rop R., Duppare M., Forbes A.* Accelerated rotation with orbital angular momentum modes // Phys. Rev. A. 2015. V. 91. P. 043821.
109. *Wang H., Rui G., Zhan Q.* Dynamic propagation of optical vortices embedded in full Poicare beams with rotationally polarization symmetry // Opt. Commun. 2015. V. 351. P. 15–25.
110. *Khan S.N., Chatterjee S.K., Chaudhuri P.R.* Polarization and propagation characteristics of switchable first-order azimuthally asymmetric beam generated in dual-mode fiber // Appl. Opt. 2015. V. 54. P. 1528–1536.
111. *Kotova S.P., Losevsky N.N., Prokopova D.P., Samagin S.A., Volostnikov V.G., Vorontsov E.N.* Aberration influenced generation of rotating two-lobe light fields // J. Phys.:Conf. Ser. 2016. V. 740. P. 012013.
112. *Volostnikov V.G., Vorontsov E.N., Kotova S.P., Losevsky N.N., Prokopova D.V., Razueva E.V., Samagin S.A.* Generation of two-lobe light fields with a rotating intensity distribution under propagation for single emitter spectroscopy // EPJ Web of Conf. 2017. V. 132. P. 02012.
113. *Kotlyar V.V., Khonina S.N., Skidanov R.V., Soifer V.A.* Rotation of laser beams with zero of the orbital angular momentum // Opt. Commun. 2007. V. 274, № 1. P. 8–14.
114. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. М.: Наука, 1973.
115. *Khonina S.N., Kotlyar V.V., Soifer V.A., Shikaryev M.V., Uspleniev G.V.* Trochoson // Opt. Commun. 1992. V. 91. P. 158–162.
116. *Li Y., Lee H., Wolf E.* New generalized Bessel-Gauss beams // J. Opt. Soc. Am. A. 2004. V. 21. P. 640–646.
117. *Kisilev A.P.* New structures in paraxial Gaussian beams // Opt. Spectrosc. 2004. V. 96. P. 479–481.
118. *Gutierrez-Vega J.C., Iturbe-Castillo M.D., Chavez-Cedra S.* Alternative formulation for invariant optical fields: Mathieu beams // Opt. Lett. 2000. V. 25, № 20. P. 1493–1495.
119. *Chavez-Cedra S., Gutierrez-Vega J.C., New G.H.C.* Elliptic vortices of electromagnetic wave fields // Opt. Lett. 2001. V. 26, № 22. P. 1803–1805.
120. *Kotlyar V.V., Kovalev A.A.* Hermite-Gaussian modal laser beams with orbital angular momentum // J. Opt. Soc. Am. A. 2014. V. 31, № 2. P. 274–282.

121. Dennis M.R., Ring J.D. Propagation-invariant beams with quantum pendulum spectra: from Bessel beams to Gaussian beam-beams // *Opt. Lett.* 2013. V. 38, № 17. P. 3325–3328.
122. Котляр В.В., Ковалев А.А., Соифер В.А. Бездифракционные асимметричные элегантные пучки Бесселя с дробным орбитальным угловым моментом // *Компьютерная оптика.* 2014. Т. 38, № 1. С. 4–10.
123. Huang S., Miao Z., He C., Pang F., Li Y., Wang T. Composite vortex beams by coaxial superposition of Laguerre-Gaussian beams // *Optics and Lasers in Engineering.* 2016. V. 78. P. 132–139.
124. Plick W.N., Krenn M. Physical meaning of the radial index of Laguerre-Gauss beams // *Physical Review A.* 2015. V. 92, № 6. P. 063841.
125. Savelyev D.A., Khonina S.N. Characteristics of sharp focusing of vortex Laguerre-Gaussian beams // *Computer Optics.* 2015. V. 39, № 5. P. 654–662.
126. Stilgoe A.B., Nieminen T.A., Rubinsztein-Dunlop H. Energy, momentum and propagation of non-paraxial high-order Gaussian beams in the presence of an aperture // *Journal of Optics.* 2015. V. 17, № 12. P. 125601.
127. Zhang Y., Liu X., Belić M., Zhong W., Wen F., Zhang Y. Anharmonic propagation of two-dimensional beams carrying orbital angular momentum in a harmonic potential // *Opt. Lett.* 2015. V. 40. P. 3786–3789.
128. Kim D.J., Kim J.W. High-power TEM₀₀ and Laguerre-Gaussian mode generation in double resonator configuration // *Applied Physics B.* 2015. V. 121, № 3. P. 401–405.
129. Lin D., Daniel J., Clarkson W. Controlling the handedness of directly excited Laguerre-Gaussian modes in a solid-state laser // *Opt. Lett.* 2014. V. 39. P. 3903–3906.
130. Ruffato G., Massari M., Romanato F. Generation of high-order Laguerre-Gaussian modes by means of spiral phase plates // *Opt. Lett.* 2014. V. 39. P. 5094–5097.
131. Das B.C., Bhattacharyya D., De S. Narrowing of Doppler and hyperfine line shapes of Rb - D2 transition using a Vortex beam // *Chemical Physics Letters.* 2016. V. 644. P. 212–218.
132. Allocca A., Gatto A., Tacca M., Day R.A., Barsuglia M., Pillant G., Buy C., Vajente G. Higher-order Laguerre-Gauss interferometry for gravitational-wave detectors with in situ mirror defects compensation // *Physical Review D.* 2015. V. 92, № 10. P. 102002.
133. Sun K., Qu C., Zhang C. Spin-orbital-angular-momentum coupling in Bose-Einstein condensates // *Physical Review A.* 2015. V. 91, № 6. P. 063627.
134. Mondal P.K., Deb B., Majumder S. Angular momentum transfer in interaction of Laguerre-Gaussian beams with atoms and molecules // *Physical Review A.* 2014. V. 89, № 6. P. 063418.

135. Otsu T., Ando T., Takiguchi Y., Ohtake Y., Toyoda H., Itoh H. Direct evidence for three-dimensional off-axis trapping with single Laguerre-Gaussian beam // *Scientific Reports.* 2014. V. 4. P. 4579.
136. Krenn M., Fickler R., Fink M., Handsteiner J., Malik M., Scheidl T., Ursin R., Zeilinger A. Communication with spatially modulated light through turbulent air across Vienna // *New Journal of Physics.* 2014. V. 16. P. 113028.
137. Kravtsov Yu.A. Complex ray and complex caustics // *Radiophys. Quantum Electron.* 1967. V. 10. P. 719–730.
138. Kotlyar V.V., Kovalev A.A., Soifer V.A. Asymmetric Bessel modes // *Optics Letters.* 2014. V. 39, № 8. P. 2395–2398.
139. Kim H.C., Lee Y.H. Hermite-Gaussian and Laguerre-Gaussian beams beyond the paraxial approximation // *Optics Communications.* 1999. V. 169. P. 9–16.
140. Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. Table of Integrals, Series, and Products. Academic Press, 1965.
141. Kovalev A.A., Kotlyar V.V., Porfirev A.P. Shifted nondiffractive Bessel beams // *Phys. Rev. A.* 2015. V. 91, № 5. P. 053840.
142. Kotlyar V.V., Kovalev A.A., Skidanov R.V., Soifer V.A. Asymmetric Bessel-Gauss beams // *J. Opt. Soc. Am. A.* 2014. V. 31, № 9. P. 1977–1983.
143. Rykov M.A., Skidanov R.V. Modifying the laser beam intensity distribution for obtaining improved strength characteristics of an optical trap // *Applied Optics.* 2014. V. 53, № 2. P. 156–164.
144. Mair A., Vaziri A., Weihs G., Zeilinger A. Entanglement of the orbital angular momentum states of photons // *Nature.* 2001. V. 412, № 6844. P. 313–316.
145. Kotlyar V.V., Kovalev A.A. Family of hypergeometric laser beams // *Journal of the Optical Society of America A.* 2008. V. 25, № 1. P. 262–270.
146. Janicijević L.J., Topuzoski S., Stoyanov L., Dreischuh A. Fraunhofer diffraction of a Gaussian beam by a four-sector binary grating with a half period fringes shift between adjacent sectors // *Optical and Quantum Electronics.* 2019. V. 51. P. 71.
147. Kovalev A.A., Kotlyar V.V., Porfirev A.P. Asymmetric Laguerre-Gaussian beams // *Physical Review A.* 2016. V. 93, № 6. P. 063858.
148. Barcelo-Chong A., Estrada-Portillo B., Canales-Benavides A., Lopez-Aguayo S. Asymmetric Mathieu beams // *Chinese Optics Letters.* 2018. V. 16, № 12. P. 122601.
149. Zhao Q., Gong L., Li Y.M. Shaping diffraction-free Lommel beams with digital binary amplitude masks // *Applied Optics.* 2015. V. 54, № 25. P. 7553–7558.

150. *Anguiano-Morales M.* Self-healing properties of asymmetric Bessel beams // *Optical and Quantum Electronics*. 2018. V. 50. P. 363.
151. *Wu Q., Ren Z.* Study of the nonparaxial propagation of asymmetric Bessel-Gauss beams by using virtual source method // *Optics Communications*. 2019. V. 432. P. 8–12.
152. *Alam S.U., Rao A.S., Ghosh A., Vaity P., Samanta G.K.* Nonlinear frequency doubling characteristics of asymmetric vortices of tunable, broad orbital angular momentum spectrum // *Applied Physics Letters*. 2018. V. 112. P. 171102.
153. *Седлецкий А.М.* Асимптотика нулей вырожденной гипергеометрической функции // *Математические заметки*. 2007. Т. 82, № 2. С. 262–271.
154. *Vaziri A., Weihs G., Zeilinger A.* Superpositions of the orbital angular momentum for applications in quantum experiments // *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*. 2002. V. 4, № 2. P. S47–S51.
155. *Chen Q., Shi B., Zhang Y., Guo G.* Entanglement of the orbital angular momentum states of the photon pairs generated in a hot atomic ensemble // *Physical Review A*. 2008. V. 78. P. 053810.
156. *Kotlyar V.V., Kovalev A.A., Porfirev A.P.* Asymmetric Gaussian optical vortex // *Opt. Lett.* 2017. V. 42, № 1. P. 139–142.
157. *Kumar A., Vaity P., Singh R.P.* Crafting the core asymmetry to lift the degeneracy of optical vortices // *Optics Express*. 2011. V. 19, № 7. P. 6182–6190.
158. *Kotlyar V.V., Khonina S.N., Almazov A.A., Soifer V.A., Jefimovs K., Turunen J.* Elliptic Laguerre-Gaussian beams // *Journal of the Optical Society of America A*. 2006. V. 23, № 1. P. 43–56.
159. *Kotlyar V.V., Kovalev A.A., Porfirev A.P.* Vortex Hermite-Gaussian laser beams // *Optics Letters*. 2015. V. 40, № 5. P. 701–704.
160. *Courtial J., Dholakia K., Allen L., Padgett M.J.* Gaussian beams with very high orbital angular momentum // *Optics Communications*. 1997. V. 144, № 4–6. P. 210–213.
161. *Kotlyar V.V., Kovalev A.A., Porfirev A.P.* Astigmatic laser beams with a large orbital angular momentum // *Optics Express*. 2018. V. 26, № 1. P. 141–156.
162. *Serna J., Movilla J.* Orbital angular momentum of partially coherent beams // *Optics Letters*. 2001. V. 26. P. 405–407.
163. *Yang Z.* Optical orbital angular momentum of evanescent Bessel waves // *Optics Express*. 2015. V. 23. P. 12700–12711.
164. *Charnotskii M.* Transverse linear and orbital angular momenta of beam waves and propagation in random media // *Journal of Optics*. 2017. V. 20, № 2. P. 025602.

165. *Martinez-Castellanos I., Gutiérrez-Vega J.* Shaping optical beams with non-integer orbital-angular momentum: a generalized differential operator approach // *Optics Letters*. 2015. V. 40. P. 1764–1767.
166. *Bekshaev A.Ya., Soskin M.S., Vasnetsov M.V.* Optical vortex symmetry breakdown and decomposition of the orbital angular momentum of light beams // *Journal of the Optical Society of America A*. 2003. V. 20, № 8. P. 1635–1643.
167. *Bekshaev A.Ya., Soskin M.S., Vasnetsov M.V.* Transformation of higher-order optical vortices upon focusing by an astigmatic lens // *Optics Communications*. 2004. V. 241. P. 237–247.
168. *Kotlyar V.V., Kovalev A.A., Porfirev A.P.* Elliptic Gaussian optical vortices // *Physical Review A*. 2017. V. 95, № 5. P. 053805.
169. *Kovalev A.A., Kotlyar V.V., Porfirev A.P.* A highly efficient element for generating elliptic perfect optical vortices // *Applied Physics Letters*. 2017. V. 110, № 26. P. 261102.
170. *Tahara T., Kanno T., Arai Y., Ozawa T.* Single-shot phase-shifting incoherent digital holography // *Journal of Optics*. 2017. V. 19, № 6. P. 065705.
171. *Zhang P., Hernandez D., Cannan D., Hu Y., Fardad S., Huang S., Chen J., Christodoulides D., Chen Z.* Trapping and rotating microparticles and bacteria with moiré-based optical propelling beams // *Biomedical Optics Express*. 2012. V. 3, № 8. P. 1891–1897.
172. *De Sio L., Roberts D., Liao Z., Nersisyan S., Uskova O., Wickboldt L., Tabiryan N., Steeves D., Kimball B.* Digital polarization holography advancing geometrical phase optics // *Optics Express*. 2016. V. 24, № 16. P. 18297–18306.
173. *De Sio L., Roberts D., Liao Z., Nersisyan S., Uskova O., Wickboldt L., Tabiryan N., Steeves D., Kimball B.* Digital polarization holography advancing geometrical phase optics // *Optics Express*. 2016. V. 24, № 16. P. 18297–18306.
174. *Ruffato G., Massari M., Romanato F.* Diffractive optics for combined spatial- and mode-division demultiplexing of optical vortices: design, fabrication and optical characterization // *Scientific Reports*. 2016. V. 6. P. 24760.
175. *Kotlyar V.V., Kovalev A.A.* Controlling orbital angular momentum of an optical vortex by varying its ellipticity // *Optics Communications*. 2018. V. 410. P. 202–205.
176. *Kogelnik H., Li T.* Laser Beams and Resonators // *Applied Optics*. 1966. V. 5. P. 1550–1567.
177. *Grier D.* A revolution in optical manipulation // *Nature*. 2003. V. 424. P. 810–816.

178. Kuga T., Torii Y., Shiokawa N., Hirano T. Novel optical trap of atoms with a doughnut beam // *Physical Review Letters*. 1997. V. 78. P. 4713–4716.
179. Bernet S., Jesacher A., Furhapter S., Maurer C., Ritsch-Marte M. Quantitative imaging of complex samples by spiral phase contrast microscopy // *Optics Express*. 2006. V. 14. P. 3792–3805.
180. Willig K.I., Rizzoli S.O., Westphal V., Jahn R., Hell S.W. STED microscopy reveals that synaptotagmin remains clustered after synaptic vesicle exocytosis // *Nature*. 2006. V. 440. P. 935–939.
181. Wang J., Yang J., Fazal I.M., Ahmed N., Yan Y., Huang H., Ren Y., Yue Y., Dolinar S., Tur M., Willner A.E. Terabit free-space data transmission employing orbital angular momentum multiplexing // *Nature Photonics*. 2012. V. 6. P. 488–496.
182. Abramochkin E.G., Volostnikov V.G. Beam transformations and nontransformed beams // *Optics Communications*. 1991. V. 83, № 1–2. P. 123–135.
183. Izdebskaya Y., Fadeyeva T., Shvedov V., Volyar A. Vortex-bearing array of singular beams with very high orbital angular momentum // *Optics Letters*. 2006. V. 31, № 17. P. 2523–2525.
184. Li Z., Zhang M., Liang G., Li X., Chen X., Cheng C. Generation of high-order optical vortices with asymmetrical pinhole plates under plane wave illumination // *Optics Express*. 2013. V. 21, № 13. P. 15755–15764.
185. Krenn M., Tischler N., Zeilinger A. On small beams with large topological charge // *New Journal of Physics*. 2016. V. 18. P. 033012.
186. Zheng S., Wang J. Measuring orbital angular momentum (OAM) states of vortex beams with annular gratings // *Scientific Reports*. 2017. V. 7. P. 40781.
187. Vieira J., Trines R.M.G.M., Alves E.P., Fonseca R.A., Mendonca J.T., Bingham R., Norreys P., Silva L.O. High orbital angular momentum harmonic generation // *Physical Review Letters*. 2016. V. 117. P. 265001.
188. Chen Y., Fang Z., Ren Y., Gong L., Lu R. Generation and characterization of a perfect vortex beam with a large topological charge through a digital micromirror device // *Applied Optics*. 2015. V. 54, № 27. P. 8030–8035.
189. Jesacher A., Furhapter S., Maurer C., Bernet S., Ritsch-Marte M. Holographic optical tweezers for object manipulations at an air-liquid surface // *Optics Express*. 2006. V. 14, № 13. P. 6342–6352.
190. Fickler R., Lapkiewicz R., Plick W.N., Krenn M., Schaeff C., Ramelow S., Zeilinger A. Quantum entanglement of high angular momenta // *Science*. 2012. V. 338. P. 640–643.
191. Campbell G., Hage B., Buchler B., Lam P.K. Generation of high-order optical vortices using directly machined spiral phase mirrors // *Applied Optics*. 2012. V. 51, № 7. P. 873–876.

192. Shen Y., Campbell G.T., Hage B., Zou H., Buchler B.C., Lam P.K. Generation and interferometric analysis of high charge optical vortices // *Journal of Optics*. 2013. V. 15. P. 044005.
193. Majakheri E., Tavabi A.H., Lu P., Balboni R., Venturi F., Menozzi C., Gazzadi G.C., Frabboni S., Sit A., Dunin-Borkowski R.E., Karimi E. Realization of electron vortices with large orbital angular momentum using miniature holograms fabricated by electron beam lithography // *Applied Physics Letters*. 2017. V. 110. P. 093113.
194. Fickler R., Campbell G., Buchler B., Lam P.K., Zeilinger A. Quantum entanglement of angular momentum states with quantum number up to 10010 // *Proc. the National Academy of Sciences of the United States of America*. 2016. V. 113, № 48. P. 13642–13647.
195. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979. 832 с.
196. Kotlyar V.V., Kovalev A.A. Vortex-free laser beam with an orbital angular momentum // *Computer Optics*. 2017. V. 41, № 4. P. 573–576.
197. Котляр В.В., Ковалев А.А. Орбитальный угловой момент астигматического гауссова лазерного пучка // *Компьютерная оптика*. 2017. Т. 41, № 5. С. 609–616.
198. Molina-Terriza G., Rekolons J., Torres J.P., Torner L., Wright E.M. Observation of the dynamical inversion of the topological charge of an optical vortex // *Physical Review Letters*. 2001. V. 87, № 2. P. 023902.
199. Kotlyar V.V., Kovalev A.A., Porfirev A.P. Astigmatic transforms of an optical vortex for measurement of its topological charge // *Appl. Opt.* 2017. V. 56, № 14. P. 4095–4110.
200. Denisenko V., Shvedov V., Desyatnikov A.S., Neshev D.N., Krolikowski W., Volyar A., Soskin M., Kivshar Y.S. Determination of topological charges of polychromatic optical vortices // *Opt. Express*. 2009. V. 17, № 26. P. 23374–23379.
201. Alperin S.N., Niederriter R.D., Gopinath J.T., Siemens M.E. Quantitative measurement of the orbital angular momentum of light with a single, stationary lens // *Opt. Lett.* 2016. V. 41, № 21. P. 5019–5022.
202. Alperin S.N., Siemens M.E. Angular momentum of topologically structured darkness // *Phys. Rev. Lett.* 2017. V. 119. P. 203902.
203. Maji S., Brundavanam M.M. Controlled noncanonical vortices from higher-order fractional screw dislocations // *Opt. Lett.* 2017. V. 42, № 12. P. 2322–2325.
204. Volyar A.V., Egorov Yu.A. Super pulses of orbital angular momentum in fractional-order spiroid vortex beams // *Opt. Lett.* 2018. V. 43, № 1. P. 74–77.

205. Melo L.A., Jesus-Silva A.J., Chavez-Cedra S., Ribeiro P.H.S., Soares W.C. Direct measurement of the topological charge in elliptical beams using diffraction by a triangular aperture // *Sci. Rep.* 2018. V. 8. P. 6370.
206. Efron U. *Spatial Light Modulator Technology: Materials, Devices, and Applications*. First edition. CRC Press, 1995.
207. Rosales-Guzmán C., Forbes A. How to shape light with spatial light modulators, SPIE.Spotlight, 2017.
208. Yao K., Wang J., Liu X., Liu W. Closed-loop adaptive optics system with a single liquid crystal spatial light modulator // *Opt. Express*. 2014. V. 22, № 14. P. 17216–17226.
209. Wright A.J., Patterson B.A., Poland S.P., Girkin J.M., Gibson G.M., Padgett M.J. Dynamic closed-loop system for focus tracking using a spatial light modulator and a deformable membrane mirror // *Opt. Express*. 2006. V. 14, № 1. P. 222–228.
210. Akondi V., Jewel A.R., Vohnsen B. Closed-loop adaptive optics using a spatial light modulator for sensing and compensating of optical aberrations in ophthalmic applications // *J. Biomed. Opt.* 2014. V. 19, № 9. P. 096014.
211. Zhao Y., Wang J. High-base vector beam encoding/decoding for visible-light communications // *Opt. Lett.* 2015. V. 40. P. 4843–4846.
212. Grier D.G., Roichman Y. Holographic optical trapping // *Appl. Opt.* 2006. Vol 45, № 5. P. 880–887.
213. Liesener J., Reicherter M., Haist T., Tiziani H.J. Multi-functional optical tweezers using computer-generated holograms // *Opt. Commun.* 2000. V. 185. P. 77–82.
214. Drobczyński S., Duś-szachniewicz K. Real-time force measurement in double wavelength optical tweezers // *J. Opt. Soc. Am. B.* 2017. V. 34, № 1. P. 38–43.
215. Makowski M., Ducin I., Kakarenko K., Suszek J., Sypek M., Kolodziejczyk A. Simple holographic projection in color // *Opt. Express*. 2012. V. 20. P. 25130–25136.
216. Kowalczyk A.P., Makowski M., Ducin I., Sypek M., Kolodziejczyk A. Collective matrix of spatial light modulators for increased resolution in holographic image projection // *Opt. Express*. 2018. V. 26, № 13. P. 17158–17169.
217. Takiguchi Y., Otsu T., Inoue T., Toyoda H. Self-distortion compensation of spatial light modulator under temperature-varying conditions // *Opt. Express*. 2014. V. 22, № 13. P. 16087–16098.
218. Jesacher A., Schwaighofer A., Fürhapter S., Maurer C., Bernet S., Ritsch-Marte M. Wavefront correction of spatial light modulators using an optical vortex image // *Opt. Express*. 2007. V. 15, № 9. P. 5801–5808.

219. Liang Y., Cai Y., Wang Z., Lei M., Cao Z., Wang Y., Li M., Yan S., Bianco P.R., Yao B. Aberration correction in holographic optical tweezers using a high-order optical vortex // *Appl. Opt.* 2018. V. 57, № 13. P. 3618–3623.
220. Szatkowski M., Popiolek Masajada A., Masajada J. Optical vortex trajectory as a merit function for spatial light modulator correction // *Opt. Lasers Eng.* 2019. V. 118. P. 1–6.
221. Perez-Garcia B., Yepiz A., Hernandez-Aranda R.I., Forbes A., Swartzlander G.A. Digital generation of partially coherent vortex beams // *Opt. Lett.* 2016. V. 41, № 15. P. 3471–3474.
222. Kotlyar V.V., Kovalev A.A., Porfirev A.P. *Vortex Laser Beams*. First edition. CRC Press, 2018.
223. Vasilyeu R., Dudley A., Khilo N., Forbes A. Generating superpositions of higher-order Bessel beams // *Opt. Express*. 2009. V. 17, № 26. P. 23389–23395.
224. Latychevskaia T., Schachtler D., Fink H.-W. Creating Airy beams employing a transmissive spatial light modulator // *Appl. Opt.* 2016. V. 55, № 22. P. 6095–6101.
225. Zhang Y., Li P., Ma C., Liu S., Cheng H., Han L., Zhao J. Efficient generation of vector beams by calibrating the phase response of a spatial light modulator // *Appl. Opt.* 2017. V. 56, № 17. P. 4956–4960.
226. Perez-Garcia B., Lypez-Mariscal C., Hernandez-Aranda R., Gutierrez-Vega J. On-demand tailored vector beams // *Appl. Opt.* 2017. V. 56, № 24. P. 6967–6972.
227. Garcia-Garcia J., Rickenstorff-Parrao C., Ramos-Garcia R., Arrizón V., Ostrovsky A. Simple technique for generating the perfect optical vortex // *Opt. Lett.* 2014. V. 39, № 18. P. 5305–5308.
228. Vaity P., Rusch L. Perfect vortex beam: Fourier transformation of a Bessel beam // *Opt. Lett.* 2015. V. 40, № 4. P. 597–600.
229. Rosales-Guzmán C., Bhebhe N., Mahonisi N., Forbes A. Multiplexing 200 spatial modes with a single hologram // *J. Opt.* 2017. V. 19, № 11. P. 113501.
230. Szatkowski M., Masajada J., Augustyniak I., Nowacka K. Generation of composite vortex beams by independent Spatial Light Modulator pixel addressing // *Optics Communications*. 2020. V. 463. P. 125341.
231. A. Forbes, A. Dudley, M. McLaren, Creation and detection of optical modes with spatial light modulators // *Adv. Opt. Photonics*. 2016. V. 8, № 2. P. 200–227.
232. Liu K., Liu Z., Dong X. Multi-beams engineered to increase patterns of vortex lattices by employing zero lines of the coherent non-diffracting field // *Opt. Express*. 2019. V. 27, № 15. P. 21652–21666.

233. *Bekshaev A.Ya., Soskin M.S., Vasnetsov M.V.* An optical vortex as a rotating body: mechanical features of a singular light beam // *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* 2004. V. 6, № 5. P. S170.
234. *Emile O., Emile J.* Naked eye picometer resolution in a Michelson interferometer using conjugated twisted beams // *Opt. Lett.* 2017. V. 42, № 2. P. 354–357.
235. *Khonina S.N., Ustinov A.V., Fomchenkov S.A., Porfirev A.P.* Formation of hybrid higher-order cylindrical vector beams using binary multi-sector phase plates // *Sci. Rep.* 2018. V. 8. P. 14320.
236. *Wojnowski D., Jankowska E., Masajada J., Suszek J., Augustyniak I., Popiolek-Masajada A., Ducin I., Kakarenko K., Sypek M.* Surface profilometry with binary axicon-vortex and lens-vortex optical elements // *Opt. Lett.* 2014. V. 39, № 1. P. 119–122.
237. *Sokolenko B., Shostka N., Karakchieva O., Poletaev D., Voytitsky V., Halilov S., Prisyazhniuk A., Piyasova A., Kolosenko E.* Optical vortex phase determination for nanoscale imaging // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2018. V. 1062. P. 012004.
238. *Yang D., Zhao J., Zhao T., Kong L.* Generation of rotating intensity blades by superposing optical vortex beams // *Opt. Commun.* 2011. V. 284, № 14. P. 3597–3600.
239. Дифракционная оптика и нанофотоника / Под ред. В.А. Соффера. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. 606 с.
240. *Kotlyar V.V., Stafeev S.S., Nalimov A.G.* Sharp focusing of laser light. CRC Press, 2019. 302 p.