

Оптимальные базисы в оптических приложениях

[В.А. Андреев](#)¹, [А.В. Бурдин](#)^{1,2}, [В.А. Бурдин](#)¹

¹Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики,
Льва Толстого 23, Самара, Россия, 443010

²АО "НПО ГОИ им. С.И. Вавилова", Бабушкина 36/1, Санкт-Петербург, Россия, 192171

Аннотация

Средства дифракционной оптики позволяют оптически реализовать широкий спектр математических функций, полезных в различных приложениях. Особый интерес представляют базисы, оптимальные с точки зрения представления и передачи оптической информации. В научной школе академика РАН профессора Виктора Александровича Сойфера значительное внимание уделяется решению задач в этой области. Успешно решены задачи оптического мультиплексирования- демultipлексирования различных пучков лазерного излучения для модового уплотнения каналов связи, численной и оптической реализации разложения Карунена-Лоэва для исследования устойчивости распространения вихревых пучков в среде со случайными флуктуациями, применение собственных функций ограниченных оптических систем для передачи сигнала с меньшими искажениями. Достигнутые результаты в разработке новых оптических устройств могут служить основой для перспективных информационных технологий.

Введение

В информационной теории оптимальность представления некоторого сигнала [1–2] означает выбор такого базиса, в котором число коэффициентов разложения по этому базису минимально. В оптических приложениях особое внимание уделяется базисам, представляющим собой решение дифференциального или интегрального оператора распространения через определенную оптическую среду или систему. Как правило, это моды лазерного излучения. Кроме того, интерес представляют базисы, оптимальные с точки зрения представления и передачи оптической информации. Например, базис Карунена–Лоэва, обеспечивающий минимальное количество членов разложения в представлении случайного сигнала. А также собственные функции ограниченных оптических систем, согласование с которыми обеспечивает передачу сигнала с меньшими искажениями. Оптическая реализация таких сложных базисных функций, не имеющих иногда даже аналитического представления, возможна только с применением средств дифракционной оптики. Большой вклад в развитие теоретических основ и методов дифракционной оптики принадлежит научной школе академика РАН профессора Виктора Александровича Сойфера. В данной статье проведен краткий обзор достижений научной школы, связанных с формированием и анализом оптических сигналов на основе оптимальных базисов.

Моды лазерного излучения

В оптике хорошо известен базис плоских волн, спектр которого можно получить в фокальной плоскости линзы. Наряду с плоскими волнами часто используется разложение по коническим волнам, которые также соответствуют собственным функциям оптических волокон с постоянным показателем преломления, т.е. модам Бесселя. Однако выполнить оптическое разложение по базису конических волн не так просто. Формирование пучка Бесселя нулевого порядка можно выполнить с помощью стеклянного конуса (рефракционного аксикона) [3], но для генерации мод Бесселя высокого порядка потребовалась разработка принципиально иных оптических элементов, которые можно объединить понятием «Бессель-оптика» [4]. В теории резонаторов, градиентных волноводов и параксиальных оптических систем широко используются моды Гаусса–Эрмита, Гаусса–Лагерра, которые являются собственными функциями градиентных сред [5]. При анализе aberrаций волнового фронта используется базис Цернике [6]. Осуществить генерацию, а также оптическое разложение по таким базисам стало возможно только с появлением дифракционных оптиче-

ских элементов (ДОО). В работах А.М. Прохорова, И.Н. Сисакяна, В.А. Сойфера и др. [4, 7–10] было предложено синтезировать оптические элементы – «моданы», формирующие и селектирующие отдельные моды лазерного излучения. Похожая постановка задачи содержалась в статье A.W. Lohmann, G.K. Grau с соавторами [11], опубликованной через год после выхода работы М.А. Голуба, А.М. Прохорова, И.Н. Сисакяна и В.А. Сойфера [6]. Эти пионерские работы получили широкое развитие в научной школе академика РАН профессора Виктора Александровича Сойфера [12].

В группе проф. В.В. Котляра были рассчитаны, а затем изготовлены при сотрудничестве проф. С.Н. Хониной и группы проф. Я. Турунена (Университет Йоеенсуу, Финляндия) ДОО, обеспечивающие формирование многомодовых лазерных пучков с заданными свойствами самовоспроизведения [13–18].

Базис Карунена-Лозва

Кроме перечисленных выше базисов, известны другие оптимальные базисы, не имеющие аналитического представления. Это связано, как правило, с дополнительными условиями или ограничениями, накладываемыми на оптические системы или оптический сигнал.

При статистическом подходе к описанию сигналов оптимальным базисом для представления отдельных реализаций случайных сигналов является базис Карунена–Лозва (К-Л) [19], при котором норма ошибки, усредненная по ансамблю реализаций, минимальна. То есть, разложение К-Л обеспечивает минимальное количество членов среди всех возможных разложений в представлении случайного сигнала для заданной среднеквадратичной ошибки [20]. Это свойство востребовано в различных приложениях: от задач распознавания до проблемы повышения устойчивости передачи оптического сигнала в условиях турбулентности атмосферы [21–26].

В начале 1990-х годов в ИСОИ РАН была успешно решена задача расчета базиса К-Л для экспоненциально-косинусной корреляционной функции [27], а затем исследована возможность его оптической реализации [28, 29] с целью формирования декоррелированных признаков оптических сигналов. За эти результаты В.А. Сойфер и С.Н. Хонина получили в 1993 году Первую премию Германского общества содействия прикладной информатике за лучшую научную работу в области обработки изображений и распознавания образов.

В последнее время становятся все более актуальными задачи передачи оптического сигнала на значительные расстояния в свободном пространстве, применения оптического излучения для зондирования поверхности Земли, определения параметров окружающей среды, локации и навигации [30–32]. Применение оптического излучения в этих приложениях сталкивается с необходимостью учета влияния атмосферной турбулентности [33–35]. Поэтому множество усилий направлено на поиск возможности преодоления негативного влияния турбулентности среды. Обзор современного состояния в этой области можно найти в совместной публикации исследователей ИСОИ РАН, Самарского Университета и Университета Майми [36]. Также, по инициативе академика В.А. Сойфера были выполнены численные и экспериментальные исследования по устойчивости вихревых пучков к случайным флуктуациям оптической среды [37–42].

Для анализа способности тех или иных пучков сохранять информационную стабильность (например, орбитальный угловой момент) при воздействии случайных флуктуаций оптической среды используется численное моделирование или лабораторные эксперименты с имитаторами турбулентности, среди которых диффузоры, рассеивающие экраны и ячейки турбулентности [43–44]. Синтез такого имитатора турбулентности можно реализовать с помощью разложения К-Л для заданных корреляционных операторов на основе поиска собственных функций этих операторов [45–46].

Базис вытянутых сфероидальных волновых функций

При анализе и компенсации атмосферных искажений используется не только разложение К-Л, но и базис вытянутых сфероидальных волновых функций (ВСВФ) [47].

Согласно теории преобразования Фурье, сигнал не может быть одновременно резко ограниченным в объектной области и в полосе пространственных частот, но с использованием ВСВФ можно обеспечить наилучшую концентрацию поля одновременно в объектной и пространственно-частотной областях [48–49]. ВСВФ также применяются в различных приложениях: в теории син-

теза антенн, при восстановлении объектов по изображению, для сверхразрешения, в теории резонаторов, в цифровой фильтрации [50–55]. В начале 2000-х годов в ИСОИ РАН под руководством В.А. Сойфера был разработан новый устойчивый метод вычисления собственных значений ВСВФ нулевого порядка для произвольных значений параметров [56], а также приближения собственных функций конечными рядами [57–58]. В дальнейшем, на основе разработанных алгоритмов были исследованы возможности применения базиса ВСВФ в задачах формирования бездифракционных пучков [59–60] и повышения разрешающей способности изображающих систем [61].

Коммуникационные моды

Базис сфероидальных функций тесно связан с понятием коммуникационных мод [62–63], которые представляют собой собственные функции некоторого оптического оператора распространения. В частности, коммуникационные моды в декартовой системе координат для финитного (ограниченного в пространстве) преобразования Фурье соответствуют вытянутым угловым сфероидальным функциям. Также сфероидальные функции являются собственными и для двухлинзовой системы, в которой появляется дополнительное ограничение в плоскости пространственного спектра [48–49].

Ещё одной привлекательной особенностью метода коммуникационных мод является то, что он упрощает дифракцию в свободном пространстве до обыкновенного математического умножения, тем самым делая его интересным инструментом для осуществления распространения волн и синтеза полей [64]. Для реализации такого подхода в ИСОИ РАН были использованы методы расчета ДОЭ, согласованных с ВСВФ [65]. Возможность оптической генерации произвольной суперпозиции сфероидальных функций позволяет формировать оптические поля, проходящие через соответствующие оптические системы без искажений [66–68].

Теория коммуникационных мод (или собственных функций оптических операторов) применима для произвольных оптических систем и электромагнитных волн [69–74].

Особенным типом оптической системы является оптическое волокно. Современный уровень использования оптического волокна для передачи информации по временным и частотным каналам стремится к пределу пропускной способности. Дополнительно увеличить число информационных каналов можно на основе модового мультиплексирования (mode division multiplexing – MDM) [10, 75]. Эта технология включает себя передачу информации в различных поперечных модах на одном физическом носителе – оптическом волокне. Передаваемая информация может содержаться в модовой структуре и в энергетической составляющей, переносимой каждой модой в отдельности в лазерном пучке. Более того, наибольший интерес представляет мультиплексирование, основанное на вихревых пучках, связанных с орбитальным угловым моментом [76–78]. Для модового уплотнения каналов на основе орбитального углового момента в реальных (ограниченных) волокнах возникает необходимость расчета вихревых собственных функций [78]. Прохождение оптического сигнала через много-линзовые оптические системы и градиентные волноводы хорошо описывается дробным преобразованием Фурье [79–84]. Пространственное ограничение неизбежно приводит к необходимости рассматривать пространственно-ограниченные операторы распространения и вычислять соответствующие собственные функции для моделирования прохождения оптического сигнала [85–86]. Такой подход позволяет не только понять природу искажений оптического сигнала, но и сформировать аппроксимацию исходного сигнала через разложение по собственными функциями линзовой системы по аналогии с ВСВФ. При формировании такой аппроксимации можно соблюсти компромисс между точностью аппроксимации и возможностью передачи сигнала без искажений.

Заключение

Современные вычислительные ресурсы обеспечивают возможность вычисления собственных функций достаточно сложных операторов, в том числе описывающих оптику ближнего поля и сканирующие оптические системы [87–88], а средства дифракционной оптики позволяют оптически реализовать эти сложные распределения. В этой области научная школа академика В.А. Сойфера находится на уровне мировых приоритетов уже несколько десятилетий [10, 89-93], создавая не только новые оптические устройства, но и формируя на этой основе перспективные информационные технологии [94–96].

Литература

- [1] Jin, Q. An optimum complete orthonormal basis for signal analysis and design / Q. Jin, Z.Q. Luo, K.M. Wong // *IEEE Trans. Inf. Theory.* – 1995. – Vol. 40(3). – P. 732-742.
- [2] Виттих, В.А. Обработка изображений в автоматизированных системах научных исследований / В.А. Виттих, В.В. Сергеев, В.А. Соифер – М.: Наука, 1982. – 214 с.
- [3] McLeod, J.H. The axicon: a new type optical element / J.H. McLeod // *J. Opt. Soc. Am.* – 1954. – Vol. 44(8). – P. 592-597.
- [4] Березный, А.Е. Бессель-оптика / А.Е. Березный, А.М. Прохоров, И.Н. Сисакян, В.А. Соифер // *Доклады АН СССР.* – 1984. – Т. 274, № 4. – С. 802-804.
- [5] Yariv, A. *Quantum Electronics* / A. Yariv – NY: Wiley, 1975.
- [6] Born, M. *Principles of Optics* / M. Born, E. Wolf – Pergamon Press, Oxford, 1968.
- [7] Голуб, М.А. Синтез пространственных фильтров для исследования поперечного модового состава когерентного излучения / М.А. Голуб, А.М. Прохоров, И.Н. Сисакян, В.А. Соифер // *Квантовая электроника.* – 1982. – Т. 9, № 9. – С. 1866-1868.
- [8] Голуб, М.А. Фазовые пространственные фильтры, согласованные с поперечными модами / М.А. Голуб, С.В. Карпеев, Н.Л. Казанский, А.В. Мирзов, И.Н. Сисакян, В.А. Соифер // *Квантовая электроника.* – 1988. – Т. 18. – С. 617-618.
- [9] Голуб, М.А. Моданы – новые элементы компьютерной оптики / М.А. Голуб, И.Н. Сисакян, В.А. Соифер // *Компьютерная оптика.* – 1990. – Т. 8. – С. 3-64.
- [10] Soifer, V.A. *Laser beam mode selection by computer-generated holograms* / V.A. Soifer, M.A. Golub – CRC Press, Boca Raton, 1994.
- [11] Bartelt, H.O. Mode analysis of optical fibers using computer-generated matched filters / H.O. Bartelt, A.W. Lohmann, W. Freude, G.K. Grau // *Electronic Letters.* – 1983. – Vol. 19(7). – P. 247-249.
- [12] Sokolov, V.O. On the 70th birthday of corresponding member of the Russian Academy of Sciences Victor A. Soifer / V.O. Sokolov // *CEUR Workshop Proceedings.* – 2015. – Vol. 1490. – P. 1-8. DOI: 10.18287/1613-0073-2015-1490-1-8.
- [13] Котляр, В.В. Вращение световых многомодовых пучков Гаусса-Лагерра в свободном пространстве / В.В. Котляр, В.А. Соифер, С.Н. Хонина // *Письма в ЖТФ.* – 1997. – Т. 23, № 17. – С. 1-6.
- [14] Хонина, С.Н. Дифракционные оптические элементы, согласованные с модами Гаусса-Лагерра / С.Н. Хонина, В.В. Котляр, В.А. Соифер // *Оптика и спектроскопия.* – 1998. – Т. 85, № 4. – С. 695-703.
- [15] Kotlyar, V.V. Rotation of multimodal Gauss-Laguerre light beams in free space and in a fiber / V.V. Kotlyar, V.A. Soifer, S.N. Khonina // *Optics and Lasers in Engineering.* – 1998. – Vol. 29(4-5). – P. 343-350.
- [16] Khonina, S.N. Decomposition of a coherent light field using a phase Zernike filter / S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, V.A. Soifer, Y. Wang, D. Zhao // *Proceedings of SPIE.* – 1998. – Vol. 3573. – P. 550-553.
- [17] Khonina, S.N. Generation of rotating Gauss-Laguerre modes with binary-phase diffractive optics / S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, V.A. Soifer, M. Honkanen, J. Lautanen, J. Turunen // *Journal of Modern Optics.* – 1999. – Vol. 46(2). – P. 227-238.
- [18] Khonina, S.N. Generating a couple of rotating nondiffracting beams using a binary-phase DOE / S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, V.A. Soifer, J. Lautanen, M. Honkanen, J. Turunen // *Optik.* – 1999. – Vol. 110(3). – P. 137-144.
- [19] Fukunaga, K. Representation of random processes using the finite Karhunen-Loeve expansion / K. Fukunaga, W.L.G. Koontz // *Information and Control.* – 1970. – Vol. 16(1). – P. 85-101.
- [20] Huang, S.P. Convergence study of the truncated Karhunen-Loeve expansion for simulation of stochastic processes / S.P. Huang, S.T. Quek, K.K. Phoon // *International Journal for Numerical Methods in Engineering.* – 2001. – Vol. 52. – P. 1029-1043. DOI: 10.1002/nme.255.
- [21] Watanabe, S. Karhunen-Lotve expansion and factor analysis theoretical remarks and applications // *Proc. 4th Prague Conf. Inform. Theory,* 1965.
- [22] Kirby, M. Application of the Karhunen-Lokve Procedure for the Characterization of Human Faces / M. Kirby, L. Sirovich // *IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence.* – 1990. – Vol. 12(1). – P. 103-108.
- [23] Kouassi, R.K. Application of the Karhunen-Loeve transform for natural color images analysis / R.K. Kouassi, J.C. Devaux, P. Gouton, M. Paindavoine // *Irish Machine Vision and Image Process. Conf.* – 1997. – Vol. 1. – P. 20-27.
- [24] Brooks, G.P. A Karhunen-Loève least-squares technique for optimization of geometry of a blunt body in supersonic flow / G.P. Brooks, J.M. Powers // *Journal of Computational Physics.* – 2004. – Vol. 195. – P. 387-412.
- [25] Wang, L. *Karhunen-Loeve Expansions and their Application* / L. Wang – Ann Arbor: ProQuest, 2008. – 292 p.
- [26] Perrin, G. Karhunen-Loeve expansion revisited for vector-valued random fields: scaling, errors and optimal basis / G. Perrin, C. Soize, D. Duhamel, C. Fünfschilling // *Journal of Computational Physics.* – 2013. – Vol. 242(1). – P. 607-622. DOI: 10.1016/j.jcp.2013.02.036. hal-00805616.

- [27] Голуб, М.А. Разложение Карунена-Лоэва при экспоненциально-косинусной корреляционной функции / М.А. Голуб, С.Н. Хонина // Компьютерная оптика. – 1993. – Т. 13. – С. 49-53.
- [28] Soifer, V.A. Decorrelated features of images extracted with the aid of optical Karhunen-Loeve expansion / V.A. Soifer, M.A. Golub, S.N. Khonina // Pattern Recognition and Image Analysis. – 1993. – Vol. 3(3). – P. 289-295.
- [29] Soifer, V.A. Stability of the Karhunen-Loeve expansion in the problem of pattern recognition / V.A. Soifer, S.N. Khonina // Pattern Recognition and Image Analysis. – 1994. – Vol. 4(2). – P. 137-148.
- [30] Majumdar, A.K. Free-space laser communications: principles and advances / A.K. Majumdar, J.C. Ricklin – New York: Springer Science & Business Media, 2008. – 418 p.
- [31] Henniger, H. An Introduction to Free-space Optical Communications / H. Henniger, O. Wilfer // Radioengineering. – 2010. – Vol.19(2). – P. 203-212.
- [32] Willner, A.E. Recent advances in high-capacity free-space optical and radio-frequency communications using orbital angular momentum multiplexing / A.E. Willner, Y. Ren, G. Xie, Y. Yan, L. Li, Z. Zhao, J. Wang, M. Tur, A.F. Molish, S. Ashrafi // Philos. Trans. A Math Phys. Eng. Sci. – 2017. – Vol. 375. – P. 20150439.
- [33] Krenn, M. Communication with spatially modulated light through turbulent air across Vienna / M. Krenn, R. Fickler, M. Fink, J. Handsteiner, M. Malik, T. Scheidl, R. Ursin, A. Zeilinger // New J. Phys. – 2014. – Vol. 16. – P. 113028.
- [34] Mishchenko, M.I. Scattering, Absorption, and Emission of Light by Small Particles / M.I. Mishchenko, L.D. Travis, A.A. Lacis – Cambridge: Cambridge University Press, 2002. – 462 p.
- [35] Andrews, L.C. Laser beam propagation in random media / L.C. Andrews. – Bellingham, WA: SPIE Optical Engineering Press, 2005. – 808 p.
- [36] Soifer, V.A. Vortex beams in turbulent media: review / V.A. Soifer, O. Korotkova, S.N. Khonina, E.A. Shchepakina // Computer Optics. – 2016. – Vol. 40(5). – P. 605-624. DOI: 10.18287/2412-6179-2016-40-5-605-624.
- [37] Porfirev, A.P. Study of propagation of vortex beams in aerosol optical medium / A.P. Porfirev, M.S. Kirilenko, S.N. Khonina, R.V. Skidanov, V.A. Soifer // Applied Optics. – 2017. – Vol. 56(11). – P. E5-15. DOI: 10.1364/AO.56.0000E8.
- [38] Карпеев, С.В. Сравнение устойчивости вихревых пучков Лагерра-Гаусса к случайным флуктуациям оптической среды / С.В. Карпеев, В.Д. Паранин, М.С. Кириленко // Компьютерная оптика. – 2017. – Т. 41, № 2. – С. 208-217. DOI: 10.18287/2412-6179-2017-41-2-208-217.
- [39] Khonina, S.N. A technique for simultaneous detection of individual vortex states of Laguerre-Gaussian beams transmitted through an aqueous suspension of microparticles / S.N. Khonina, S.V. Karpeev, V.D. Paraniin // Optics and Lasers in Engineering. – 2018. – Vol. 105. – P. 68-74. DOI: 10.1016/j.optlaseng.2018.01.006.
- [40] Kirilenko, M.S. Simulation of vortex laser beams superposition propagation through a random optical environment / M.S. Kirilenko, S.N. Khonina, N.L. Kazanskiy // Proc. SPIE. – 2018. – Vol. 10774. – P. 1077409. DOI: 10.1117/12.2318465.
- [41] Васильев, В.С. Распространение пучков Бесселя и суперпозиций вихревых пучков в атмосфере / В.С. Васильев, А.И. Капустин, Р.В. Скиданов, Н.А. Ивлиев, В.В. Подлипов, С.В. Ганчевская // Компьютерная оптика. – 2019. – Т. 43, № 3. – С. 376-384. DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-3-376-384.
- [42] Кириленко, М.С. Исследование устойчивости топологического заряда многокольцевых вихревых пучков Лагерра-Гаусса к случайным искажениям / М.С. Кириленко, С.Н. Хонина // Компьютерная оптика. – 2019. – Т. 43, №4. – С. 567-576. DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-4-567-576.
- [43] Thomas, S. A simple turbulence simulator for adaptive optics / S. Thomas // Proceedings of SPIE. – 2004. – Vol. 5490. – P. 766-773. DOI: 10.1117/12.549858.
- [44] Mishra, S.K. Design and testing of customized phase plate as atmospheric turbulence simulator / S.K. Mishra, A. Dixit, V. Porwal, D. Mohan // 37th National Symposium of OSI at Pondicherry University. – 2013. – P. 172-174. DOI: 10.13140/2.1.4106.5920.
- [45] Spanos, P. Karhunen-Loève expansion of stochastic processes with a modified exponential covariance kernel / P. Spanos, M. Beer, J. Red-Horse // Journal of Engineering Mechanics. – 2007. – Vol. 133(7). – P. 773-779.
- [46] Хонина, С.Н. Метод генерации случайного оптического поля с помощью разложения Карунена-Лоэва для имитации турбулентности атмосферы / С.Н. Хонина, С.Г. Волотовский, М.С. Кириленко // Компьютерная оптика. – 2020. – Т. 44, №1. – С. 53-59.
- [47] Fancourt, C.L. On the relationship between the Karhunen-Loeve transform and the prolate spheroidal wave functions / C.L. Fancourt, C. Principe // IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing. – 2000. – Vol. 1. – P. 261-264.
- [48] Slepian, D. Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty-I / D. Slepian, H.O. Pollak // Bell Syst. Tech. J. – 1961. – Vol. 40(1). – P. 43-63.
- [49] Landau, H.J. Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty-II / H.J. Landau, H.O. Pollack // Bell Syst. Tech. J. – 1961. – Vol. 40(1). – P. 65-84.

- [50] Хургин, Я.И. Методы теории целых функций в радиофизике, теории связи и оптике / Я.И. Хургин, В.П. Яковлев – М.: Физматгиз, 1962.
- [51] Papoulis, A. Digital filtering and prolate functions / A. Papoulis, M. Bertran // IEEE Trans. Circuit Theory. – 1972. – Vol. CT-19(6). – P. 674-681.
- [52] Bertero, M. Resolution beyond the diffraction limit for regularized object restoration / M. Bertero, G.A. Viano, C. De Mol // Opt. Acta. – 1980. – Vol. 27(3). – P. 307-320.
- [53] Lantz, E. Retrieval of a phase-and-amplitude submicrometric object from images obtained in partially coherent microscopy / E. Lantz // J. Opt. Soc. Am. A. – 1991. – Vol. 8(5). – P. 791-800.
- [54] Piche, M. Modes of resonator with internal apertures / M. Piche, P. Lavigne, F. Martin, P.A. Belanger // Appl. Opt. – 1983. – Vol. 22(13). – P. 1999-2006.
- [55] Walter, G.G. Wavelet based on prolate spheroidal wave functions / G.G. Walter, X. Shen // J. Fourier Anal. Appl. – 2004. – Vol. 10(1). – P. 1-26.
- [56] Хонина, С.Н. Метод вычисления собственных значений вытянутых сфероидальных функций нулевого порядка / С.Н. Хонина, С.Г. Волотовский, В.А. Соيفер // Доклады Академии наук. – 2001. – Т. 376, № 1. – С. 30-33.
- [57] Хонина, С.Н. Приближение сфероидальных волновых функций конечными рядами / С.Н. Хонина // Компьютерная оптика. – 1999. – Т. 19. – С. 65-70.
- [58] Volotovskii, S.G. Analysis and development of the methods for calculating eigenvalues of prolate spheroidal functions of zero order / S.G. Volotovskii, N.L. Kazanskii, S.N. Khonina // Pattern Recognition and Image Analysis. – 2011. – Vol. 11(3). – P. 633-648.
- [59] Хонина, С.Н. Влияние дифракции на изображения, согласованные с вытянутыми сфероидальными волновыми функциями / С.Н. Хонина, В.В. Котляр // Компьютерная оптика. – 2011. – Т. 21. – С. 58-63.
- [60] Khonina, S.N. Effect of diffraction on images matched with prolate spheroidal wave functions / S.N. Khonina, V.V. Kotlyar // Pattern Recognition and Image Analysis. – 2001. – Vol. 11(3). – P. 521-528.
- [61] Броварова, М.А. Повышение разрешающей способности с помощью вытянутых сфероидальных волновых функций / М.А. Броварова, С.Н. Хонина // Компьютерная оптика. – 2001. – Т. 21. – С. 53-57.
- [62] Miller, D.A.B. Communicating with waves between volumes: evaluating orthogonal spatial channels and limits on coupling strengths / D.A.B. Miller // Appl. Opt. – 2000. – Vol. 39. – P. 1681-1699.
- [63] Gallager, R.G. Information Theory and Reliable Communication / R.G. Gallager –New York: Wiley, 1968. – 608 p.
- [64] Thaning, A. Limits of diffractive optics by communication modes / A. Thaning, P. Martinsson, M. Karelin, A.T. Friberg // J. Opt. A: Pure Appl. Opt. – 2003. – Vol. 5. – P. 153-158.
- [65] Khonina, S.N. Generating light fields matched to the spheroidal wave-function basis / S.N. Khonina, V.V. Kotlyar // Optical Memory and Neural Networks. – 2001. – Vol. 10(4). – P. 267-276.
- [66] Kirilenko, M.S. Coding of an optical signal by a superposition of spheroidal functions for undistorted transmission of information in the lens system / M.S. Kirilenko, S.N. Khonina // Proceedings of SPIE. – 2014. – Vol. 9146. – P. 91560J. DOI: 10.1117/12.2054214.
- [67] Kirilenko, M.S. Formation of signals matched with vortex eigenfunctions of bounded double lens system / M.S. Kirilenko, S.N. Khonina // Optics Communications. – 2018. – Vol. 410. – P. 153-159. DOI: 10.1016/j.optcom.2017.09.060.
- [68] Khonina, S.N. Defined distribution forming in the near diffraction zone based on expansion of finite propagation operator eigenfunctions / S.N. Khonina, M.S. Kirilenko, S.G. Volotovskiy // Procedia Engineering. – 2017. – Vol. 201. – P. 53-60. DOI: 10.1016/j.proeng.2017.09.659.
- [69] Piestun, R. Electromagnetic degrees of freedom of an optical system / R. Piestun, D.A.B. Miller // J. Opt. Soc. Am. A. – 2000. – Vol. 17. – P. 892-902.
- [70] Williams, M. The eigenfunctions of the Karhunen-Loeve integral equation for a spherical system / M. Williams // Probabilistic Engineering Mechanics. – 2011. – Vol. 26. – P. 202-207.
- [71] Fasshauer, G.E. Positive definite kernels: past, present and future / G.E. Fasshauer // Dolomite Research Notes on Approximation. – 2011. – Vol. 4. – P. 21-63.
- [72] Mazilu, M. Optical Eigenmodes; exploiting the quadratic nature of the energy flux and of scattering interactions / M. Mazilu, J. Baumgartl, S. Kosmeier, K. Dholakia // Optics Express. – 2011. – Vol. 19(2). – P. 933-945.
- [73] Любопытов, В.С. Математическая модель детектирования параметров распространения мод в оптическом волокне при маломодовом режиме для адаптивной оптической компенсации смещения мод / В.С. Любопытов, А.З. Тлявлин, А.Х. Султанов, В.Х. Багманов, С.Н. Хонина, С.В. Карпеев, Н.Л. Казанский // Компьютерная оптика. – 2013. – Т. 37, № 3. – С. 352-359.
- [74] Baumgartl, J. Far field subwavelength focusing using optical eigenmodes / J. Baumgartl, S. Kosmeier, M. Mazilu, E.T.F. Rogers, N.I. Zheludev, K. Dholakia // Applied Physics Letters. – 2011. – Vol. 98. – P. 181109.

- [75] Berdague, S. Mode division multiplexing in optical fibers / S. Berdague, P. Facq // *Appl. Optics*. – 1982. – Vol. 21. – P. 1950-1955.
- [76] Khonina, S.N. Optical Vortices in a Fiber: Mode Division Multiplexing and Multimode Self-Imaging / S.N. Khonina, N.L. Kazanskiy, V.A. Soifer // *Recent Progress in Optical Fiber Research*. – 2012. – Vol. 65. – P. 327-352.
- [77] Bozinovic, N. Terabit-scale orbital angular momentum mode division multiplexing in fibers / N. Bozinovic, Y. Yue, Y. Ren, M. Tur, P. Kristensen, H. Huang, A.E. Willner, S. Ramachandran // *Science*. – 2013. – Vol. 340(6140). – P. 1545-1548.
- [78] Willner, A.E. Optical communications using orbital angular momentum beams / A.E. Willner, H. Huang, Y. Yan, Y. Ren, N. Ahmed, G. Xie, C. Bao, L. Li, Y. Cao, Z. Zhao, J. Wang, M.P.J. Lavery, M. Tur, S. Ramachandran, A. F. Molisch, N. Ashrafi, S. Ashrafi // *Advances in Optics and Photonics*. – 2015. – Vol. 7(1). – P. 66-106.
- [79] Kirilenko, M.S. Propagation of vortex eigenfunctions of bounded Hankel transform in a parabolic fiber / M.S. Kirilenko, O.A. Mossoulina, S.N. Khonina // *IEEE Proceedings*, 2016. – P. 4-32. DOI: 10.1109/LO.2016.754978.
- [80] Namias, V. The fractional Fourier transform and its application in quantum mechanics / V. Namias // *Journal of the Institute of Mathematics and its Applications*. – 1980. – Vol. 25. – P. 241-265.
- [81] Abet, S. Generalization of the fractional Fourier transformation to an arbitrary linear lossless transformation: an operator approach / S. Abet, J.T. Sheridan // *Journal of Physics A: Mathematical and General*. – 1994. – Vol. 27. – P. 4179-4187.
- [82] Alieva, T. Fractional transforms in optical information processing / T. Alieva, M.J. Bastiaans, M.L. Calvo // *EURASIP Journal on Applied Signal Processing*. – 2005. – Vol. 10. – P. 1-22.
- [83] Кириленко, М.С. Вычисление собственных функций ограниченного дробного преобразования Фурье / М.С. Кириленко, Р.О. Зубцов, С.Н. Хонина // *Компьютерная оптика*. – 2015. – Т. 39, № 3. – С. 332-338. DOI: 10.18287/0134-2452-2015-39-3-332-338.
- [84] Kirilenko, M.S. Calculation of the eigenfunctions of two lens imaging system / M.S. Kirilenko, S.N. Khonina // *Proc. of SPIE*. – 2015. – Vol. 9450. – P. 945012-8. DOI: 10.1117/12.2070371.
- [85] Betzig, E. Near-field optics: microscopy, spectroscopy, and surface modification beyond the diffraction limit / E. Betzig, J.K. Trautman // *Science*. – 1992. – Vol. 257(5067). – P. 189-195. DOI: 10.1126/science.257.5067.189.
- [86] Girard, C. Near-field optics theories / C. Girard, A. Dereux // *Reports on Progress in Physics*. – 1996. – Vol. 59(5). – P. 657-699. DOI: 10.1088/0034-4885/59/5/002.
- [87] Kirilenko, M.S. Investigation of the free-space propagation operator eigenfunctions in the near-field diffraction / M.S. Kirilenko, V.V. Pribylov, S.N. Khonina // *Progress in Electromagnetics Research Symposium*. – 2015. – Vol. 2015. – P. 2035-2038.
- [88] Хонина, С.Н. Формирование заданных распределений на основе разложения по вихревым собственным функциям ограниченного непараксиального оператора распространения / С.Н. Хонина, С.Г. Волотовский, М.С. Кириленко // *Компьютерная оптика*. – 2019. – Т. 43, № 2. – С. 184-192. DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-2-184-192.
- [89] Волков, А.В. Методы компьютерной оптики / А.В. Волков, Д.Л. Головашкин, Л.Д. Досколович, Н.Л. Казанский, В.В. Котляр, В.С. Павельев, Р.В. Скиданов, В.А. Сойфер, В.С. Соловьев, Г.В. Успенев, С.И. Харитонов, С.Н. Хонина – М.: Физматлит, 2000. – 688 с.
- [90] Головашкин, Д.Л. Дифракционная компьютерная оптика / Д.Л. Головашкин, Л.Л. Досколович, Н.Л. Казанский, В.В. Котляр, В.С. Павельев, Р.В. Скиданов, В.А. Сойфер, С.Н. Хонина – М.: Физматлит, 2007. – 736 с.
- [91] Гаврилов, А.В. Дифракционная нанофотоника / А.В. Гаврилов, Д.Л. Головашкин, Л.Л. Досколович, П.Н. Дьяченко, А.А. Ковалев, В.В. Котляр, А.Г. Налимов, Д.В. Нестеренко, В.С. Павельев, Р.В. Скиданов, В.А. Сойфер, С.Н. Хонина, Я.О. Шушупова – М., Физматлит, 2011. – 680 с.
- [92] Безус, Е.А. Дифракционная оптика и нанофотоника / Е.А. Безус, Д.А. Быков, Л.Л. Досколович, А.А. Ковалев, В.В. Котляр, А.Г. Налимов, А.П. Порфирьев, Р.В. Скиданов, В.А. Сойфер, С.С. Стафеев, С.Н. Хонина – М.: Физматлит, 2014. – 608 с.
- [93] Безус, Е.А. Нанофотоника и ее применение в системах ДЗЗ / Е.А. Безус, Д.А. Быков, Л.Л. Досколович, Н.Л. Казанский, С.В. Карпеев, А.А. Морозов, П.Г. Серафимович, Р.В. Скиданов, В.А. Сойфер, С.И. Харитонов, С.Н. Хонина – Самара: Новая техника, 2016. – 384 с.
- [94] Soifer, V.A. Diffractive optical elements in nanophotonics devices / V.A. Soifer, V.V. Kotlyar, L.L. Doskolovich // *Computer Optics*. – 2009. – Vol. 33(4). – P. 352-368.
- [95] Emelyanov, S.V. Differentiating space-time optical signals using resonant nanophotonics structures / S.V. Emelyanov, D.A. Bykov, N.V. Golovastikov, L.L. Doskolovich, V.A. Soifer // *Doklady Physics*. – 2016. – Vol. 61(3) – P. 108-111.
- [96] Soifer, V.A. Diffractive nanophotonics and advanced information technologies / V.A. Soifer // *Herald of the Russian Academy of Sciences*. – 2014. – Vol. 84(1). – P. 9-20.